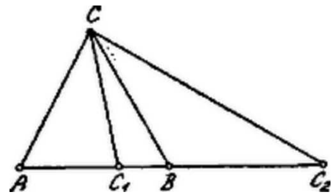
Az $ABC$ háromszögnek $\overline{AB} = c$ oldalán jelöljük ki az $(A,\, B)$, $(C_1,\, C_2)$ harmonikus pontpárokat úgy, hogy $\overline{AC_1} : -\overline{BC_2} = \overline{AC_1} : \overline{BC_2} = k_2 : k_1$, ahol $k_2$ és $k_1$ megadott pozitív számok.




Húzzuk meg ezután a $CC_1$ és $CC_2$ egyeneseket; ezen egyenesek hajlásszögével megegyező $\varphi = C_1CC_2\sphericalangle$ szögét meg tudjuk állapítani a háromszög adataiból és a $k_2,\, k_1$ arányszámokból. Itt megjegyezzük, hogy $C_1$ az $A$ és $B$ közé, $C_2$ pedig $B$-től jobbra esik, ha $k_2 > k_1$, ellenkező esetben $C_2$ pont $A$-tól balra kerül.

A háromszög csúcspontjait derékszögű koordinátáival oldjuk meg: $A(x_1,\, y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$; ez alapon könnyen felírható a $C_1$ és $C_2$ pontok két koordinátája:

$$C_1\left(\frac{k_2x_2 + k_1x_1}{k_2 + k_1},\ \frac{k_2y_2 + k_1y}{k_2 + k_1}\right),\quad C_2\left(\frac{k_2x_2 - k_1x_1}{k_2 - k_1},\ \frac{k_2y_2 - k_1y_1}{k_2 - k_1}\right).$$

A két egyenes hajlásszögének tangense kiszámítható $CC_1$ és $CC_2$ egyenesek iránytényezőiből.

A $CC_1$ egyenes iránytényezője

$$m_1 = \left(\frac{k_2y_2 + k_1y_1}{k_2 + k_1} - y_3\right) : \left(\frac{k_2x_2 + k_1x_1}{k_2 + k_1} - x_3\right) = \frac{k_2(y_2 - y_3) + k_1(y_1 - y_3)}{k_2(x_2 - x_3) + k_1(x_1 - x_3)}.$$

Hasonlóan a $CC_1$ egyenes iránytényezője

$$m_2 = \frac{k_2(y_2 - y_3) - k_1(y_1 - y_3)}{k_2(x_2 - x_3) - k_1(x_1 - x_3)}.$$

Már most ismeretes, hogy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}.$$

Ily módon némi egyszerűsítés után

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{[k_2(x_2 - x_3) + k_1(x_1 - x_3)][k_2(y_2 - y_3) - k_1(y_1 - y_3)] - [k_2(x_2 - x_3) - k_1(x_1 - x_3)][k_2(y_2 - y_3) + k_1(y_1 - y_3)]}{k_2^2(x_2 - x_3)^2 + k_2^2(y_2 - y_3)^2 - k_1^2(x_1 - x_3)^2 - k_1^2(y_1 - y_3)^2}$$

összefüggést nyerjük. Ha a műveleteket elvégezzük és figyelembe vesszük, hogy $a^2 = \overline{BC}^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2$, hasonlóképen $b^2 = \overline{AC}^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2$, akkor a következő egyszerűbb alakot írhatjuk:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2k_1k_2[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)]}{k_2^2a^2 - k_1^2b^2},$$

illetőleg

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2k_1k_2[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]}{k_2^2a^2 - k_1^2b^2}.$$

Ámde ismeretes a háromszög területére vonatkozólag, hogy

$$2t = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2),$$

így azután

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4k_1k_2t}{k_2^2a^2 - k_1^2b^2}\dots$$

Vegyünk most szemügyre néhány speciális esetet:

1. $CC_1$ legyen a háromszög szögfelezője; ekkor

$$AC_1 : BC_1 = b : a = k_2 : k_1 \text{ vagyis } k_2a = k_1b,$$

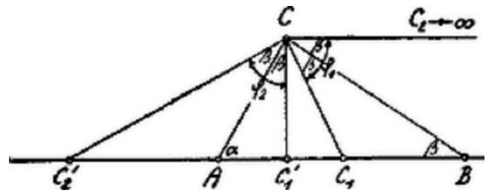
és így

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4k_1k_2t}{0} = \infty,\ \text{tehát } \varphi = 90^\circ.$$

Ezen eredmény a szögfelezőnél jól ismert tulajdonság, hogy t. i. a belső és külső szögfelező merőleges egymásra.

2. Ha $CC_1$ a háromszög oldalfelezője, akkor $k_1 = k_2$, és a hajlásszögre $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{4t}{a^2 - b^2}$ képletet nyerjük.

Ha a háromszög még egyenlőszárú, vagyis $a = b$, akkor az oldalfelező egyúttal szögfelező is, és $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{4t}{0} = \infty$ eredmény értelmében $\varphi = 90^\circ$, amit már a fenti 1) esetnél is láttunk.




3. $CC_1$ legyen a háromszög magassága, vagyis $CC_1 = h$; ekkor $AC_1 : BC_1 = h\cot\alpha : h\cot\beta = k_2 : k_1$; innen $k_2 = \dfrac{k_1 \cot\alpha}{\cot\beta}$; ennek helyettesítése után

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4t \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta}{a^2 \operatorname{cotg}^2\alpha - b^2 \operatorname{cotg}^2\beta}.$$

Ha ezen esetet derékszögű háromszög átfogójára alkalmazzuk, vagyis $\gamma = 90^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$ kikötés folytán $a = b \cdot \operatorname{cotg}\beta$ és $b = a \cdot \operatorname{cotg}\alpha$ helyettesítéseket végzünk, akkor a hajlásszögre nézve

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4t}{b^2 - a^2}$$

A 2. és 3. eset egybevetéséből kitetszik, hogy a derékszögű háromszögben az átfogó oldalfelezőjéhez

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{4t}{a^2 - b^2}$$

szerint akkora hajlásszög tartozik, mint a magassághoz, amelyre nézve

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{4t}{b^2 - a^2}.$$

Az ellenkező előjel azt jelenti, hogy e két egyenlő szög ($\varphi_1 = \varphi_2$) ellentétes oldalakon jelentkezik. (T. i. ha $a > b$, akkor a magasság talppontjára nézve ($k_2 < k_1$!). [1]

*Tihanyi Miklós*

Esztergom, 1937.

[1] Ha ábránk szerinti $C_1$ az átfogó felezőpontja, akkor a $BCC_1\triangle$ egyenlőszárú háromszög $\left(CC_1 = BC_1 = \dfrac{AB}{2}\right)$ $BC$ alapján fekvő szögek egyenlők, $(= \beta)$. Minthogy $CC_2 \parallel AB$, a $BCC_2\sphericalangle = \beta$, tehát $\varphi = 2\beta$. Valóban

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} = 2\frac{b}{a} : \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2} = \frac{4t}{a^2 - b^2}.$$

Állítsunk már most $CC_1$-re merőlegest. Akkor ez az $AB$-t $C_2$ pontban metszi úgy, hogy, ha $C_1$ a $C$-ből vont magasság talppontja,

$$AC_1' : BC_1' = AC_2' : BC_2'.$$

Ugyanis

$$AC_1' = b\cos\alpha,\ BC_1' = a\cos\beta;\ \frac{AC_1'}{BC_1'} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \operatorname{tg}^2\beta.$$

Továbbá

$$AC_2' = C_1C_2' - C_1A = \frac{CC_1}{\cos 2\beta} - C_1A = \frac{c}{2\cos\beta} - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}\frac{1-\cos\beta}{\cos 2\beta},$$
$$BC_2' = C_1C_2' + BC_1 = \frac{c}{2\cos\beta} + \frac{c}{2} = \frac{c}{2} \cdot \frac{1+\cos 2\beta}{\cos 2\beta}.$$

Eszerint

$$\frac{AC_2'}{BC_2'} = \frac{1-\cos 2\beta}{1+\cos 2\beta} = \frac{2\sin^2\beta}{2\cos^2\beta} = \operatorname{tg}^2\beta.$$

Minthogy $CC_2' \perp CC_1$ és $C_1CC_1'\sphericalangle = 90^\circ - 2\beta$, azért $C'CC_2'\sphericalangle = 2\beta$. Más szóval: $CA$ felezi a $C_1'CC_2'$ szöget.