A koordinátarendszer alkalmas választása esetén $y = x^2$ a parabola egyenlete. Ez esetben $(t,\ t^2)$ pontok – röviden t pontok – képezik a parabolát.

A parabola $|t_1 t_2|$-húrjának irányhatározója: $(t_1^2 - t_2^2) : (t_1 - t_2) = t_1 + t_2$ és így az egyenlete:

$$y - t_1^2 = (t_1 + t_2)(x - t_1).$$

Ezen az alapon bármely t parabolapontban tüstént felírható az érintő és a normális egyenlete is:

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

ill.

$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t).$$

Vagy ha a t paraméter hatványai szerint rendezzük a két egyenletet:

(1) $$t^2 - 2xt + y = 0 \ldots$$

ill.

(2) $$t^3 + \frac{1 - 2y}{2} t - \frac{x}{2} = 0 \ldots$$

Röviden csak t érintőről, ill. t normálisról beszélünk.

I. *Egy pontból a parabolához két érintőt húzhatunk.*

Adva van az $(x_0,\ y_0)$, keresendő belőle a parabolához sugárzó érintő t paramétere! Az 1. szerint

$$t^2 - 2x_0 t + y_0 = 0.$$

Keresendő tehát e t-ben másodfokú egyenlet két gyöke: t_1, t_2. Ez a két gyök két érintőt jelent (valós gyökök esetén):

$$t_i^2 - 2x_0 t_i + y_0 = 0 \qquad \text{ahol} \qquad i = 1,\ 2.$$

A gyökök és együtthatók ismert összefüggése alapján

$$t_1 + t_2 = 2x_0 \qquad \text{s innen} \qquad x_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

$$t_1 t_2 = y_0 \qquad \text{ezért} \qquad y_0 = (t_1^2 \cdot t_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Eszerint x_0 az érintési pontok abscissainak számtani, az y_0 pedig az ordináták mértani középarányosa.[1] Az $(x_0,\ y_0)$ pontot $|t_1 t_2|$ húr pólusának nevezzük.

II. *Egy pontból három normális húzható a parabolához.*

Az előbbi mintára megkeressük az adott $(x_0,\ y_0)$ pontból kisugárzó normális t paraméterét. Ez a

$$t^3 + \frac{1 - 2y_0}{2} t - \frac{x_0}{2} = 0$$

harmadfokú egyenlet gyöke. Az egyenlet harmadfokú, tehát három gyöke van, $t_1,\ t_2,\ t_3$ és mindegyikhez tartozik egy normális [2]:

$$t_i^3 + \frac{1 - 2y_0}{2} t_i - \frac{x_0}{2} = 0 \qquad \text{ahol} \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Az egyenletből hiányzik a t^2-es tag. Ezért s a gyökök és együtthatók ismert összefüggése alapján:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0, \quad t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = \frac{1 - 2y_0}{2}, \quad t_1 t_2 t_3 = \frac{x_0}{2}.$$

Írhatjuk ezeket a következő alakban is

(3) $$t_1 + t_2 + t_3 = 0 \ldots$$

(4) $$\left\{ \begin{aligned} x_0 &= 2t_1 t_2 t_3 \\ y_0 &= \frac{1 - 2(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)}{2} \end{aligned} \right\} \ldots$$

Megfordítva: ha felvesszük a 3. egyenletnek eleget tevő három pontot a parabolán, akkor azok normálisai a 4. egyenlet segítségével szerkesztett $(x_0,\ y_0)$ pontban találkoznak.

[1] V. ö. az 1446. feladattal. (Ezen évfolyam 3 számában, – 1938/11 70. old .)

[2] Valós gyököket tételezünk fel. L. IV. évfolyamunkban a 285. feladatot.

III. *A parabola görbületi köre, sugara és középpontja.*

Legyen t_1 a parabolának egyik szilárd pontja. Messük el e ponthoz tartozó normálist a tetszőleges t_2 normálisával. A metszéspont határhelyzet felé tart az első normálison, mialatt t_2 a t_1 felé tart. Származtatása folytán e metszéspont határhelyzetéből, mint középpontból $t_1 = t_2$ ponton átvezetett kör *két végtelenül közelfekvő pontban érinti* a parabolát. E kör középpontjából a fentiek szerint – még egy t_3 normális sugárzik a parabolához. Feltételünkből $(t_1 = t_2)$ és a 3. alapján $t_3 = -2t_1$, tehát elhagyhatók az indexek s a szilárd t_1 pont paraméterét szerepeltetjük index nélkül. Így 4. alapján a szóbanforgó kör középpontjának a koordinátái:

$$\begin{cases} x = -4t^3 \\ y = \dfrac{1+6t^2}{2} \dots \end{cases} \tag{5}$$

Ezt a kört a parabola t pontjához tartozó *görbületi körnek*, középpontját ill. sugarát *görbületi középpontnak* ill. *görbületi sugárnak*, a sugár reciprok értékét *görbületnek* nevezzük.

A kör általános helyzetben $(x-a)^2 + (y-b)^2 - \varrho^2 = 0$ egyenletnek felel meg. Ez alapon a görbületi kör egyenlete:

$$(x+4t^3)^2 + \left(y - \frac{1+6t^2}{2}\right)^2 - \varrho^2 = 0$$

s mivel átmegy e kör a $(t,\, t^2)$ ponton:

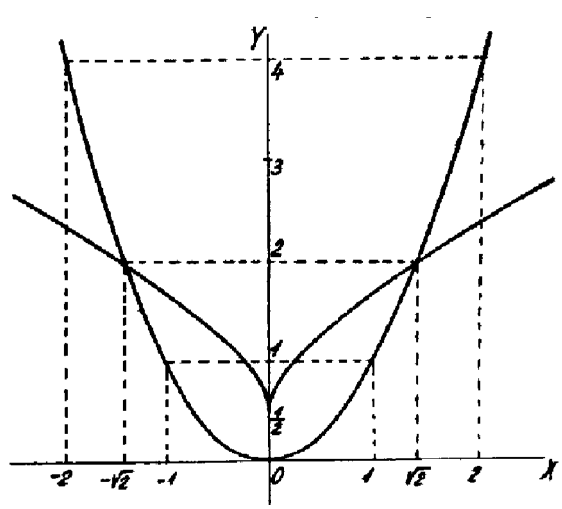
$$(t+4t^3)^2 + \left(t^2 + \frac{1+6t^2}{2}\right)^2 - \varrho^2 = 0.$$

Innen rövid számítással mind a görbületi sugár, mind a köregyenlet kiadódik:

$$\varrho^2 = 16t^6 + 12t^4 + 3t^2 + \frac{1}{2} \dots \tag{6}$$

$$x^2 + y^2 + 8t^3x - (1+6t^2)y - 3t^4 = 0 \tag{7}$$

IV. *A parabola evolutája.*



Minthogy a parabola minden pontjához más és más görbületi-kör tartozik, felmerül a kérdés: mi a középpontjuknak a mértani helye? A *görbületi középpontok mértani helyét a parabola evolutájának nevezzük.* Paraméteres egyenletrendszerét már ismerjük is: az 5. egyenletrendszer az, ha a t változó. Fejezzük ki belőle t parameter harmadik, illetőleg második hatványát. Ezután t^3-ét négyzetre, t^2-ét köbre emeljük s ezáltal a t paraméter kiküszöbölhető. Ily módon megkapjuk a parabola evolutájának egyenletét:

$$\frac{27}{2}x^2 = (2y-1)^3 \dots \tag{8}$$

Definiálhattuk volna az evolutát úgy is, mint a *parabola normálisai által burkolt görbét.* Ezt a továbbiak folyamán be fogjuk igazolni. Kimutatjuk ugyanis, hogy a 8. egyenlettel jellemzett görbe érintői azonosak a parabola normálisaival.

a) A parabola evolutája harmadrendű görbe. [3]

[3] Harmadrendű egy görbe, ha tetszőleges egyenes három pontban metszi. Harmadosztályú, ha egy pontból három érintő sugárzik hozzá.

Hány pontban metszi az általános helyzetű [4]

$$ux + vy + 1 = 0$$

egyenes az evolutát, vagyis hány görbületi középpont van az egyenesen? Evégből az 5. egyenlet értékeit helyettesítjük egyenesünk egyenletébe és ezt még t hatványai szerint rendezzük:

(9) $$t^3 - \frac{6v}{8u}t^2 - \frac{2+v}{8u} = 0\ldots$$

Az egyenlet t-ben harmadfokú, tehát három gyöke van: $t_1,\ t_2,\ t_3$. Tekintve, hogy az egyenlet elsőfokú tagja hiányzik, a gyökök és együtthatók összefüggése alapján:

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{6v}{8u}, \quad t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0, \quad t_1t_2t_3 = \frac{2+v}{8u}.$$

Ezeket még a következő alakban is írhatjuk:

(10) $$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0\ldots$$

(11) $$\begin{cases} u = \dfrac{3}{12t_1t_2t_3 - 2(t_1+t_2+t_3)} \\[2ex] v = \dfrac{4(t_1+t_2+t_3)}{12t_1t_2t_3 - 2(t_1+t_2+t_3)} \end{cases}$$

Megfordítva: ha felveszünk a parabolán a 10. egyenletet kielégítő három pontot, akkor a 11. egyenlettel meghatározott $ux + vy + 1 = 0$ egyenes tartalmazza a három ponthoz tartozó görbületi középpontot.

Bármely t paraméterhez egy evoluta pontot rendel az 5. képlet, tehát röviden csak az *evoluta t pontja* kifejezést használjuk. Láttuk, hogy az evolutát tetszőleges egyenes három pontban metszi és e metszéspontok paraméterei között 10. fejezi ki a determináló kapcsolatot.

b) A parabola evolutája harmadosztályú görbe.

Az evoluta két végtelenül közelfekvő $t_1 = t_2$ pontját összekötő egyenes az evoluta *érintője*; az előbbiek szerint még egy t_3 pontban metszi az evolutát. A tizedik egyenlet szerint és a $t_1 = t_2$ feltétel folytán: $t_3 = -\frac{t_1}{2}$. Tehát az indexezés fölösleges és így a 11. alapján írható

$$u = -\frac{1}{2t^3 + t}, \qquad v = -\frac{2t}{2t^3 + t}$$

együtthatók értelmezik az érintő egyenest. Innen az egyenlete

$$-x - 2ty + (2t^3 + t) = 0,$$

vagy még

(2') $$t^3 + \frac{1-2y}{2}t - \frac{x}{2} = 0\ldots$$

alakban is írható. Az evoluta t pontjához tartozó érintő, (röviden csak *t érintő*) azonos tehát a parabola t normálisával – amint már előre is jeleztük. Ezen az alapon mondhatjuk, hogy *egy pontból három érintő* húzható az evolutához, amelyeknek paramétereit a 3. egyenlet rendeli egymás mellé.

V. *A parabola és görbületi köreinek közös húrjai egy újabb parabola érintői.*

A parabolának görbületi-köreivel képezett metszéspontjait úgy határozzuk meg, hogy ez utóbbi egyenletébe (7.) $x = \tau, y = \tau^2$ paramétereket helyettesítjük; ez által a

(12) $$\tau^4 - 6t^2\tau^2 + 8t^3\tau - 3t^4 = 0\ldots$$

τ-ban negyedfokú egyenletre jutunk. Látható azonban, hogy a baloldal négy tényezőre bontható:

(13) $$(\tau - t)^3(\tau + 3t) = \tau^4 - 6t^2\tau^2 + 8t^3\tau - 3t^4\ldots$$

Ez azt jelenti, hogy t a 12. egyenletnek háromszoros, $-3t$ pedig egyszeres gyöke. Tehát a t ponthoz tartozó görbületi kör *három végtelenül közel fekvő pontban* (t-ben) *metszi* a parabolát és egy ezeken kívüli ($-3t$) negyedik pontban is. E szerint a *görbületi- és simuló-kör azonos fogalmak.* [5]

---

[4] $Ax + By + C = 0$ egyenesnél $u = \frac{A}{C},\ v = \frac{B}{C}$.

[5] V. ö. XI. évf. 9–10 sz. Dr. Kárteszi: Az ellipszis.

Írjuk fel most a t és $-3t$ pontokat összekötő húr egyenletét:

$$y - t^2 = (-3t + t)(x - t) = -2t(x - t).$$

Ezután vegyük szemügyre az $x^2 = -3y$ parabola érintőjét az $(x_1,\ y_1)$ pontban, az

$$y - y_1 = -\frac{2}{3}x_1(x - x_1)$$

egyenest. Ezt az új parabolát az $x_1 = 3t,\ y_1 = -3t^2$ kielégíti és ebben a pontban $y + 3t^2 = -2t(x - 3t)$ az érintője. Azonban rögtön látható, hogy ez azonos az $y - t^2 = -2t(x - t)$ húrral. Tehát $y = x^2$ parabolának görbületi köreivel képezett közös húrjai az $y = -\frac{1}{3}x^2$ parabolát burkolják.

VI. *A parabola bármely talpponti-háromszögének súlypontja a parabola tengelyén van.*

Fentebb már megmutattuk, hogy egy tetszőleges $(x_0,\ y_0)$ pontból az evolutához húzott érintők, vagyis a vezérlő parabola normálisai különös – a 3. egyenletet kielégítő – három pontot indukálnak a parabolán. Ezeket a pontokat a normálisok talppontjainak szokás nevezni és így e három pont képezte háromszöget a parabola valamely *talpponti-háromszögének,* $(x_0,\ y_0)$ pontot e háromszög *generátorának* nevezzük.

A talpponti háromszög súlypontjának rendezői:

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}, \qquad \frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{3};$$

ezek közül a 3. egyenlet miatt az elsőnek az értéke $= 0$. Ez azt jelenti, hogy a talpponti-háromszög súlypontja az Y tengelyen van.

Évfolyamunk 1. számában kimutattuk, hogy a talpponti-háromszögnek $y = x^3$ parabolára való (Y tengellyel párhuzamos) vetülete egy egyenesbe eső három pont. Ugyancsak az ott tárgyaltakból látható: a talpponti-háromszög köré írt kör átmegy a parabola csúcspontján is. [6]

VII. *A parabola simulóponti-háromoldalának súlypontja a csúcsérintőn van.*

Amint mondottuk már, görbületi- vagy simuló-kör aequivalens fogalmak. Tetszőleges $(u,\ v)$ egyenes három pontban metszi az evolutát, miáltal három – a 10. egyenletnek eleget tevő – pontot indukál a parabolán. E három pont három coaxiális simuló kör simuló pontja, azért e három ponthoz tartozó parabola érintők képezte három oldalt a parabola *simulóponti-háromoldalának* nevezzük. E háromoldal csúcsainak koordinátái az I.-részben mondottak szerint:

$$\left(\frac{t_1 + t_2}{2},\ t_1 t_2\right), \quad \left(\frac{t_2 + t_3}{2},\ t_2 t_3\right), \quad \left(\frac{t_3 + t_1}{2},\ t_3 t_1\right)$$

alakban írhatók. Ez alapon a háromoldal súlypontjának koordinátái:

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}, \qquad \frac{t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1}{3}.$$

Ezek közül a második $= 0$ (a 10. egyenlet folytán), tehát a súlypont csakugyan az Y koordináta tengelyen van.

VIII. Keressük meg az $y^2 = x^3$ görbének és a $y = mx + b$ általános helyzetű egyenesnek a metszéspontjait. A görbe nem más, mint a $(t^2,\ t^3)$ pontok összessége. Keressük meg tehát a

$$t^3 - mt^2 - b = 0$$

harmadfokú egyenlet gyökeit. A három $(t_1,\ t_2,\ t_3)$ gyökre most is fennállanak a

$$\begin{aligned} &t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = 0 \\ &m = t_1 + t_2 + t_3 \\ &b = t_1 t_2 t_3 \end{aligned}$$

összefüggések. Ezeket a 10. és 11. egyenletekkel vessük össze. Kimondhatjuk, hogy az $ux + vy + 1 = 0$ egyenes által indukált simulóponti-háromoldal csúcsainak – Y-tengellyel párhuzamos – vetületei az $y^2 = x^3$ görbén egy $y = mx + b$ egyenesbe esnek, ahol

$$m = \frac{6v}{8u}, \quad b = \frac{2 + v}{8u}.$$

Befejezésül három szép tétel bebizonyítását tűzöm ki az olvasónak.

[6] V.ö. XV. évf. 1. sz. 13–14. old. L. még a 262. feladatot IV. évf. 1. számában.

I. Valamely talpponti háromszög oldalaira polárháromszögének megfelelő csúcsaiból bocsájtott merőlegesek egy pontban találkoznak. E pont és a háromszög generátor pontja közé eső távolságot a t. p. h. köré írt kör középpontja felezi.

II. Talpponti háromszög csúcsaihoz tartozó simuló körök még egy talpponti háromszöget metszenek ki a parabolából. Simulóponti háromoldal simuló pontjaihoz tartozó simuló körök még egy s. p. h. o. simulópontjait metszik ki a parabolából.

III. A parabola tetszőlegesen adott érintőjét három simuló-kör érinti még, amelyeknek simuló érintője az adottal egy újabb kör köré írt négyszög.
(Ez a tétel Laguerre-től ered.)

Győrött, 1938. nov. 2.

Dr. Kárteszi Ferenc
áll. gimn. tanár