Tekintettel arra, hogy az ismétléses variációkra vonatkozó képletek kevéssé ismeretesek, talán nem lesz fölösleges velök foglalkozni. Bevezetésül legyen szabad a differencia-számítás alapjairól néhány szót szólni.

Valamely $f(x)$ függvény első differenciája alatt az alábbi kifejezést értjük:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x). \tag{1}$$

A függvény második differenciája pedig az első differenciának differenciája. Vagyis

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x).$$

Ezt folytatva, hasonlóképpen megkapjuk a függvény ν-edik differenciáját:

$$\Delta^\nu f(x) = f(x+\nu) - \binom{\nu}{1} f(x+\nu-1) + \binom{\nu}{2} f(x+\nu-2) - \ldots + (-1)^\nu \binom{\nu}{\nu} f(x).$$

Ezt rövidebben a következőkép írhatjuk:

$$\Delta^\nu f(x) = \Sigma(-1)^i \binom{\nu}{i} f(x+\nu-i), \tag{2}$$

a baloldali összeg $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu$-re értendő.

Megjegyzendő, hogy viszont ha ismerjük az $f(x)$ függvény ν-edik differenciáját, akkor ezzel meghatároztuk a jobb oldali összeget. Ez az eljárás gyakran hasznosnak bizonyul.

Vannak ugyanis függvények, melyek differenciája igen egyszerűen fejezhető ki így:

$$\Delta \binom{x}{n} = \binom{x+1}{n} - \binom{x}{n} = \binom{x}{n-1} \text{ vagy } \Delta a^x = a^x(a-1). \tag{3}$$

Ebből azonnal következik, hogy

$$\Delta^\nu \binom{x}{n} = \binom{x}{n-\nu} \text{ és } \Delta^\nu a^x = a^x(a-1)^\nu.$$

Ennélfogva például a (2) formula következtében

$$\binom{x}{n-\nu} = \Sigma(-1)^i \binom{\nu}{i} \binom{x+\nu-i}{n}.$$

A hatványok magasabb differenciái már nem ilyen egyszerűek. Azt azonban azonnal láthatjuk, hogy x^n első differenciája $n-1$ fokú; tehát n-edik differenciája konstans és $n+1$-edik differenciája nulla.

A hatványok differenciáinak kiszámítására célszerű bevezetni *Stirling* nyomán az úgynevezett másodfajú *Stirling*-féle számokat $\mathfrak{S}_n^\nu$-vel jelölve az $\dfrac{x^n}{\nu!}$ mennyiség ν-edik differenciáját az $x=0$ helyen

$$\mathfrak{S}_n^\nu = \left[\Delta^\nu \frac{x^n}{\nu!}\right]_{x=0}.$$

Ennélfogva ha a (2) képletben $f(x) = x^n/\nu!$ írunk és ha a ν-edik differenciában x-et nullával tesszük egyenlővé, akkor

$$\mathfrak{S}_n^\nu = \Sigma(-1)^i \binom{\nu}{i} \frac{(\nu-i)^n}{\nu!} \tag{4}$$

eredményre jutunk.

Ebből azonnal következik, hogy $\mathfrak{S}_n^0 = 0$ és $\mathfrak{S}_n^1 = 1$; továbbá az előzőkből láthatjuk, hogy $\mathfrak{S}_n^{n+k} = 0$. A másodfajú *Stirling*-féle számokat a (4) egyenlettel kiszámíthatjuk bármely ν és n értékre.

Ha azonban e számok táblázatát kívánjuk összeállítani, akkor célszerűbb, ha úgy járunk el, mint a *Pascal*-féle háromszög számainak kiszámításánál, amidőn tudvalevőleg legjobb, a $\binom{0}{0} = 1$ és $\binom{0}{n} = 0$ értékekből kiindulva) a számokat az alábbi „differencia”-egyenlettel határozni meg:

$$\binom{x+1}{n+1} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n+1}.$$

(Ez az egyenlet azonos a (3) egyenletek közül az elsővel.)

A (4) egyenletből kiindulva kimutatható, hogy $\mathfrak{S}_n^\nu$ eleget tesz a következő differencia-egyenletnek:

$$\mathfrak{S}_{n+1}^\nu = \mathfrak{S}_n^{\nu-1} + \nu \mathfrak{S}_n^\nu \tag{5}$$

$\mathfrak{S}_1^1 = 1$ és $\mathfrak{S}_1^0 = 0$-ból kiindulva, ez megadja lépésről-lépésre a többi másodfajú *Stirling*-féle számot.

Az (5) egyenletből következik, $\mathfrak{S}_n^{n+k} = 0$ tekintetbevételével, hogy $\mathfrak{S}_n^n = 1$. Az egyenlet az alábbi táblázatra vezet:

n/ν	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1
8	1	127	966	1701	1050	266	28

A *Stirling-féle* számok rendkívül hasznosak és a legkülönbözőbb problémák esetén felhasználhatók.

Ezek után áttérhetünk az ismétléses variáció tanulmányozására. Ismeretes, hogy m-elem ismétléses n-edrendű variációinak száma

$$W(m,\ n) = m^n.$$

Jelöljük a variációk közül azokat, melyekben csak egyféle elem szerepel,

$$W(m,\ n,\ 1)\text{-gyel.}$$

Evidens, hogy

$$W(m,\ n,\ 1) = m.$$

m elem azon n-edrendű ismétléses variációinak száma, melyekben 2 különböző elem szerepel

$$W(m,\ n,\ 2) = \binom{m}{2}(2n-2).$$

Ugyanis m elemből két elemet $\binom{m}{2}$-félekép választhatunk ki; e két elem n-ed rendű ismétléses variációinak száma 2^n; de ezek között két oly variáció van, melyek csak egy elemet tartalmaznak, vagyis minden elempár $2^n - 2$ számú n-edrendű oly ismétléses variációt ad, melyekben mind a két elem szerepel.

Azoknak az n-edrendű variációknak a száma, melyekben 3 különböző elem van

$$W(m,\ n,\ 3) = \binom{m}{3}[3^n - \binom{3}{2}W(3,\ n,\ 2) - \binom{3}{1}W(3,\ n,\ 1)].$$

Tényleg $\binom{m}{3}$ félekép választhatunk ki m elemből hármat; három elem n-ed rendű ismétléses variációinak száma 3^n; ezekből azonban le kell vonni elsősorban azokat, melyekben csak két elem van; miután három elemből kettőt $\binom{3}{2}$-félekép lehet kiválasztani és e két elem oly n-ed rendű variációinak száma, melyekben mind a kettő szerepel, $2^n - 2$. Le kell vonni továbbá azokat is, melyekben csak egy elem szerepel.

Az előző egyenletet még úgy is írhatjuk:

$$W(m,\ n,\ 3) = \binom{m}{3}\left[3^n - \binom{3}{1}2^n + \binom{3}{2}1^n\right].$$

Ezt folytatva, megkaphatjuk m elem azon n-ed rendű ismétléses variációinak számát, melyekben ν különféle elem szerepel:

$$W(m,\ n,\ \nu) = \binom{m}{\nu}\Sigma(-1)^i\binom{\nu}{i}(\nu - i)^n.$$

ahol $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu$.

A (4) képletből következik, hogy a jobb oldali összeg $\nu!\mathfrak{S}_n^\nu$-nel egyenlő, úgy hogy

(6)
$$W(m,\ a,\ \nu) = \binom{m}{\nu}\nu!\mathfrak{S}_n^\nu = m(m-1)\ldots(m-\nu+1)\mathfrak{S}_n^\nu;$$

ez adja tehát m elem azon n-edrendű variációinak számát, melyekben ν különböző elem szerepel.

Megjegyzések. 1. Miután m elem n-edrendű ismétléses variációi vagy egy, vagy kettő, vagy három, és így tovább vagy m elemet tartalmaznak, következőleg

$$W(m,\ n) = \Sigma W(m,\ n,\ \nu).$$

Vagyis

$$m^n = \Sigma m(m-1)(m-2)\ldots(m-\nu+1)\mathfrak{S}_n^\nu,$$

a differencia-számítás ismert kifejtésére jutunk. Ezen összegben $\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$.

2. Az előzőkben láttuk, hogy két elem oly n-edrendű variációinak száma, melyekben mind a két elem szerepel: $2^n - 2$; másrészt a (6) képletből folyik, hogy

$$W(2,\ n,\ 2) = 2\mathfrak{S}_n^2,$$

ami az

$$\mathfrak{S}_n^2 = 2^{n-1} - 1$$

képletet adja.

Nevezetes különleges esetek. 1. m elem azon n-edrendű ismétléses variációinak számát, $(n \geq m)$, melyek valamennyi elemet tartalmazzák, megkapjuk (6)-ból, ha abban $\nu = m$-et írunk.

$$W(m,\ n,\ m) = m!\mathfrak{S}_n^m.$$

Ha ezenkívül még $n = m$ akkor $W(m,\ m,\ m) = m!\mathfrak{S}_m^m = m!$ ami különben evidens, mert ez esetben a kérdéses variációkat az m elem permutációi alkotják.

2. m elem oly n-edrendű ismétléses variációinak számát, melyekben $m-1$ különböző elem szerepel, (6) adja, ha $\nu = m - 1$-et írunk:

$$W(m,\ n,\ m-1) = m!\mathfrak{S}_n^{m-1}.$$

Ha ezenkívül még $n = m$, akkor

$$W(m,\ m,\ m-1) = m!\mathfrak{S}_m^{m-1}\binom{m}{2}.$$

Kimutatható ugyanis, hogy $\mathfrak{S}_m^{m-1} = \binom{m}{2}$. Ez a táblázatban ellenőrizhető.

3. m elem oly n-edrendű ismétléses variációinak számát $(m \geq n)$, melyekben csupa különböző elem szerepel, (6)-ból kapjuk $\nu = n$ helyettesítéssel:

$$W(m,\ n,\ n) = m(m-1)\ldots(m-n+1)\mathfrak{S}_n^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

Valószínűségszámítási példák. Egy urnában van m szám, még pedig $1,\ 2,\ \ldots,\ m$; n-szer húzunk oly formán, hogy minden húzás után a kihúzott számot visszatesszük az urnába. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kihúzott n szám között ν különböző szám legyen. Az összes lehető esetek száma egyenlő m elem n-edrendű ismétléses variációinak számával, vagyis m^n-nel. A kedvező esetek száma pedig $W(m,\ n,\ \nu)$ úgy, hogy a keresett valószínűség:

$$P = \frac{m(m-1)\ldots(m-\nu+1)}{m^n}\mathfrak{S}_n^\nu. \tag{7}$$

Annak a valószínűsége, hogy a kihúzott n szám között valamennyi m szám jelen legyen,

$$P = \frac{m!\mathfrak{S}_n^m}{m^m}. \tag{8}$$

Továbbá annak a valószínűsége, hogy m kihúzott szám között az urnában levő m számból csak egy hiányozzék

$$P = \frac{m!\binom{m}{2}}{m^m}. \tag{9}$$

Ugyanis

$$\mathfrak{S}_m^{m-1} = \binom{m}{2}.$$

Végre annak a valószínűsége, hogy a kihúzott számok mind különbözők legyenek:

$$P = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{m^n} \tag{10}$$

Ugyanis

$$\mathfrak{S}_n^n = 1.$$

Példák. 1. Valamely csokoládégyár kis csokoládés csomagokat hoz forgalomba, melyek mindegyikében van egy kép. Összesen m-féle képet raknak a csomagokba; minden képből ugyanannyit használva fel; a csomagokat jól összekeverik. A gyártás tovább folyik. A gyár díjat tűz ki annak, aki valamennyi képet megszerzi. Ha valaki n csomagot vesz, mi a valószínűsége annak, hogy a díjat megnyerje? E valószínűséget a (8) képlet adja. Ha pl. $m = 6$ féle kép van összesen és ha 12 csomagot vesszünk, akkor miután $\mathfrak{S}_{12}^6 = 1323652$, tehát $P = 0{,}43782$.

2. n kockával dobunk; annak a valószínűségét, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat mind megkapjuk, ugyancsak a (8) képlet adja, ha abban $m = 6$ írunk. Ha például $n = 7$-szer dobunk, akkor miután $\mathfrak{S}_7^6 = 21$, tehát $P = 35/648$.

Továbbá annak a valószínűsége, hogy 6 kockával dobva a számok közül csak egy hiányozzék, (9) értelmében

$$P = \frac{6!\binom{6}{2}}{6^6} = \frac{50}{216}\,.$$

3. Egy csomag francia kártyából (52 lap) ötször húzunk visszatevéssel; annak a valószínűsége, hogy színre való tekintet nélkül mind az öt különböző legyen, (10)-ből folyik, ha benne $m = 13$ és $n = 5$ írunk. Tehát

$$P = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{13^5} = 0{,}41595.$$

Megjegyzés. Valószínűségi meggondolások gyakran érdekes eredményre vezetnek. Például könnyen beláthatjuk, hogy az előző urna problémában minél többször húzunk, annál nagyobb lesz a valószínűsége annak, hogy valamennyi számot megkapjuk; úgy hogy n növelésével tetszőlegesen megközelíthetjük a bizonyosságot. A valószínűségszámításban azonban a bizonyosság $P = 1$-nek felel meg. Következőleg

$$\lim_{n=\infty} \frac{m!\mathfrak{S}_n^m}{m^n} = 1 \quad \text{vagyis} \quad \lim_{n=\infty} \frac{\mathfrak{S}_n^m}{m^n} = \frac{1}{m!}, \tag{11}$$

ami, ha n nagy m-hez képest, $\mathfrak{S}_n^m$ megközelítő (aszimptotikus) értékét adja:

$$\mathfrak{S}_n^m \sim \frac{m^n}{m!} \tag{12}$$

Ha $m = 1$, akkor a (12) képlet pontosan adja $\mathfrak{S}_n^1 = 1$ értékét. Ha $m = 2$, akkor a képlet $\mathfrak{S}_n^2 = 2^{n-1} - 1$ helyett $\mathfrak{S}_n^2 \sim 2^{n-1}$ értéket ad.

A (11) határértéket a (4) formulából kiindulva közvetlenül is bebizonyíthatjuk.

Dr. Jordan Károly