1. A „ravasz” kérdések sorából ismeretes a következő átlagolási feladat: A jármű odafelé t_1 idő alatt v_1 sebességgel, ugyanazon úton ($s_2 = s_1 = s$), visszafelé $t_2 \neq t_1$ idő alatt v_2 sebességgel haladt; mekkora volt a teljes útra vonatkoztatott átlagos sebessége (v)?

A megoldás algebrai lépései a következők:

$$2s = v(t_1 + t_2),$$
$$v = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\dfrac{s}{v_1} + \dfrac{s}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}\,.$$

Szokásos alakban:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right).$$

Az átlagos sebességet tehát az utak egyenlősége esetén a harmonikus középpel számítjuk. [1]

A kérdés „ravaszsága”, hogy a felelet nem a köztudatban jobban ismert számtani, hanem az annál kisebb harmonikus átlagot jelöli meg. A számtani átlaghoz a tartamok egyenlősége esetében jutnánk; ugyanis, ha $t_2 = t_1 = t$ és $s_2 \neq s_1$, akkor

$$s_1 + s_2 = 2vt$$
$$v = \frac{s_1 + s_2}{2t} = \frac{t(v_1 + v_2)}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2}\,.$$

A feladat háttere így jellemezhető: Ha a vizsgált mennyiség *részleges* függése az átlagolás változójával (vagyis a többi változót egyenlőnek tekintve) egyenes arányosságú, úgy az átlagot a számtani középpel, ha fordított arányosságú, úgy a harmonikus középpel számítjuk.

A mechanika és a fizika egyéb területeiről számos idetartozó példát említhetnénk, lévén a legtöbb alapjelenség *legegyszerűbb* értelmezése illetőleg leírása ugyanezzel a függvénytani háttérrel jellemezhető.

A gazdasági számadások köréből a következő analog megépítésű – a gyakorlatban könnyen elvéthető – szabályra utalunk: A mennyiségek egységére vonatkozó egységárak (pl. 1 kg hány pengő) átlagát a számtani középpel, míg az értékek egységére vonatkoztatott egységárak (pl. 1 pengőért hány darab) átlagát a harmonikus középpel kell számba vennünk.

A bemutatott példa – mely kettőnél több adat esetére közvetlenül kiterjeszthető – óvatosságra inti a gyakorlati számvetőt, ha nyomatékosan utalunk arra, hogy *különböző* adatok harmonikus átlagolása kisebb értékhez vezet, mint azoknak számtani átlagolása. Két különböző adat ($a_1 \neq a_2$) esetében ez legegyszerűbben így igazolható: Abból, hogy $(a_1 - a_2)^2 > 0$, következik az

$$a_1^2 + a_2^2 > 2a_1a_2$$

alapvető elemi egyenlőtlenség, mellyel a számtani és a harmonikus közepek viszonyára $\left(\dfrac{A}{H}\right)$ megállapítható, hogy

$$\frac{A}{H} = \frac{(a_1 + a_2)^2}{4a_1a_2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2}{4a_1a_2} > 1.$$

Következő fejtegetésünk célja, hogy ezt a tételt a gyakorlati alkalmazások szempontjából legáltalánosabb alakjában algebrailag igazoljuk.

2. A számtani (aritmetikai vagy egyenes arányosságú) átlagolások általános gyakorlati értelmezése a következő képlettel történik:

$$A = \frac{g_1a_1 + g_2a_2 + \ldots + g_na_n}{g_1 + g_2 + \ldots + g_n},$$

amelyben $a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_n$ az n különböző pozitív adat és $g_1,\ g_2,\ \ldots\ g_n$ az adatok megosztását jellemző gyakoriságok (tehát pozitívek; a mechanikából vett analogiával súlyoknak is neveztetnek). Az általános (összetett, mérlegelt) átlag az egyszerű átlag alakját ölti, ha a gyakoriságok egyenlők (vagyis 1-nek vehetők).

A harmonikus (fordított arányosságú) átlagolásnak megfelelő képlete a következő:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{g_1 + g_2 + \ldots + g_n}\left(\frac{g_1}{a_1} + \frac{g_2}{a_2} + \ldots + \frac{g_n}{a_n}\right).$$

(Az így értelmezett egyszerű átlagokat középértékeknek (közepeknek) mondjuk, ha nem tekintünk a gyakorlati háttérre és az ilyen formális tárgyalásnál az elemek egyenlőségének esete a középértékek egybevetésénél az egyenlőség jelét involválja.)

---

[1] L. a 601. fizikai feladatot XIII. évfolyamunkban – 1937/2 –, a 194. oldalon. (Szerk.)

3. Igazolandó általános tételünk az elmondottak alapján, hogy *különböző* a-k esetében

$$\frac{A}{H} > 1.$$

Már az elemi algebrából ismeretes, hogy két *különböző* pozitív szám mértani közepe nagyobb a harmonikus és kisebb az aritmetikai középnél. ($H < G < A$). Ennek a híres és sokat alkalmazott tételnek kettőnél több különböző pozitív szám esetére történő elemi kiterjesztése *Cauchy* nagy francia matematikusnak (1789–1857.) nevéhez fűződik és megtalálható a *Kürschák:* „Matematikai Versenytételek” című gyűjtemény 103–104. oldalán. *Cauchy* klasszikus bizonyításának magja az

$$a_1 a_2 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$$

alapegyenlőtlenség kiterjesztése akárhány egymástól különböző elemre. [2]

A gyakorlati alkalmazások szempontjából hasznosnak véljük, hogy az általános $A > H$-tételnek direkt, a mértani közép elkerülésével történő, igazolását bemutassuk; ennek érdekessége abban is van, hogy nem valamely elemi egyenlőtlenségnek fokozatos továbbszerkesztéséről van szó, hanem a tárgyalás teljes folyamán a két különböző elem esetére már említett

$$a_1^2 + a_2^2 > 2a_1 a_2$$

elemi egyenlőtlenség egyszerű számításszerű alkalmazásával érhetjük be. Eljárásunkat mindjárt a 2. pontban tárgyalt legáltalánosabb gyakorlati felvételre, vagyis az „összetett átlagokra” részletezzük. [3]

Jelöléseink legyenek:

P: az $a_1 a_2 \dots a_n$ szorzat

$P^{(i)}$: a P-szorzat, ha elhagyjuk az $a_i$tényezőt; ilyen van n-számú.

$P^{(i,\ k)}$: a P szorzat, ha elhagyjuk az a_i és az a_k tényezőt; ilyen van $\binom{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$ számú.

E jelölésekkel írhatjuk, hogy

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{g_1 + g_2 + \dots + g_n} \left(\frac{g_1 P^{(1)} + g_2 P^{(2)} + \dots + g_n P^{(n)}}{P}\right),$$

tehát

$$\frac{A}{H} = \frac{1}{(g_1 + g_2 + \dots + g_n)^2 P} \Big(g_1 a_1 + g_2 a_2 + \dots + g_n a_n\Big) \Big(g_1 P^{(1)} + g_2 P^{(2)} + \dots + g_n P^{(n)}\Big).$$

A jobboldalon álló többtagú szorzatos kifejezés a művelet elvégzése után n^2 számú tagot szolgáltat; ezek kétfélék:

a) $g_i^2 a_i P^{(i)} = g_i^2 P$-alakúak, ilyen van n-számú,

b) $g_i g_k \cdot a_i P^{(k)} = g_i g_k a_i^2 P^{(i,\ k)}$-alakúak, ilyen van $n^2 - n$-számú.

A *b)*-féle tagok kettesével $(i,\ k)$ összevonhatók, amiáltal $\frac{n^2 - n}{2}$-számú következő alakú és nagyságú tagot nyerünk:

$$g_i g_k P^{(i,\ k)} (a_i^2 + a_k^2) > 2 g_i g_k a_i a_k P^{(i,\ k)} = 2 g_i g_k \cdot P.$$

Itt látjuk a két különböző elemre vonatkozó $a_i^2 + a_k^2 > 2a_i a_k$ elemi egyenlőtlenségnek egyszerű alkalmazását. A *b)*-féle tagok összegezésével nyert kifejezés tehát nagyobb, mint $2[g_i g_k] \cdot P$, ahol a szögletes zárójel arra utasít, hogy a g-kből szerkeszthető összes különböző kéttényezős szorzatok összegét kell képeznünk.

Az *a)* és *b)*-féle tagok összefoglalásával végül megállapítható, hogy

$$\frac{A}{H} > \frac{1}{(g_1 + g_2 + \dots + g_n)^2 \cdot P} \left(g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_n^2 + 2[g_i g_k]\right) \cdot P = 1,$$

ami igazolandó volt.

Dr. Goldziher Károly

[2]Cauchy bizonyítása az $A > G$ esetre vonatkozik és hasonló módon végezhető a $G > H$ esetre; így az $A > H$ tétel is benne foglaltatik. – Érdemes megemlíteni, hogy az általános egyenlőtlenségek a polinomiális tétel jobboldali kifejezésének megbecsüléséből közvetlenül adódnak.

[3]Az olvasóra bízzuk, hogy az általános tárgyalás lépéseit az $n = 3,\ 4$ esetben részletesen kövesse.