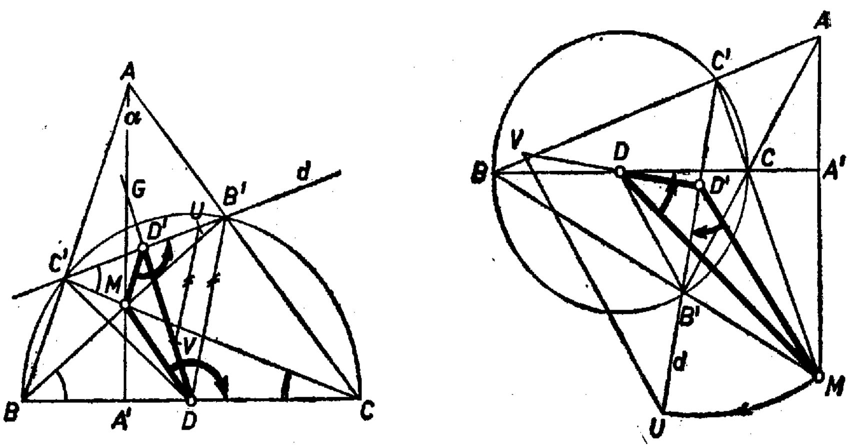
I. megoldás. Válasszuk a betűzést úgy, hogy a keresett ABC háromszög BC oldalának felezőpontja az adott D pont, a BB' és CC' magasságainak talppontjai közti $B'C'$ szakasz felezőpontja az adott D' pont, BB' és CC' metszéspontja pedig legyen M.

B' és C' rajta van a BC átmérő fölötti, D középpontú k Thalész-körön, ezért a $DB'C'$ háromszög egyenlő szárú, DD' súlyvonala egyben magassága is, tehát $B'C'$ merőlegesen áll DD'-re (1. és 2. ábra).

A $B'C'M$ és CBM háromszögek első két-két szöge rendre egyenlő, mert k ugyanazon ívein nyugvó kerületi szögek, így a két háromszög hasonló. Ezekben MD' és MD egymásnak megfelelő súlyvonalak, ezért

$$MD' : MD = B'C' : CB = B'D' : CD = B'D' : B'D. \tag{1}$$

Eszerint a $B'DD'$ derékszögű háromszög megszerkeszthető ismert $D'D$ befogójából, valamint másik befogójának és átfogójának ismert arányából a következő lépésekben: D'-n át d merőleges egyenest állítunk $D'D$-re, erre (bármelyik irányban) fölmérjük a $D'U = D'M$ szakaszt, az U körüli DM sugarú körívvel kimetsszük a $D'D$ egyenes V pontját, és D-n át párhuzamost húzunk VU-val, ennek d-vel való metszéspontja B'. Vesszük B'-nek D'-re való C' tükörképét, megrajzoljuk az MB' és MC' magasságegyeneseket és a talpponton át rájuk merőlegesen az AC, AB oldalegyéneseket, ezek metszéspontjai adják az A, B, C csúcsokat.



1. ábra

A szerkesztés szerint a $D'DB'$ háromszög hasonló $D'VU$-hoz, ezért DB' megfelel (1)-nek; az ABC háromszögnek M a magasságpontja, és D' felezi a talppontok közti $B'C'$ szakaszt. Azt kell csak bizonyítanunk, hogy a kapott BC oldal D^* felezőpontja azonos az adott D ponttal. Az elemzés szerint D^* a $BC'B'C$ húrnégyszög köré írt kör középpontja, ezért rajta van $B'C'$ felező merőlegesén, akárcsak D is rajta van, a szerkesztésnél fogva. Továbbá ismét az elemzésnél fogva D^*-nak B'-től és M-től mért távolságaira teljesül (1), és B' szerkesztése folytán teljesül DB'-re és DM-re is. Így D^* azonos D-vel.

A szerkesztés egyértelműen végrehajtható, ha D és D' különbözők, $DM > D'M$ (különben U nem jön létre; ez a feltétel D és M egybeesését is kizárja), végül ha D' sem esik egybe M-mel. Egybeesésük esetén ugyanis oda esik B', C' és A is, a háromszög A-nál derékszögű, de határozatlan, a D körüli DD' sugarú kör bármely átmérője lehet átfogója (kivéve a D'-ből kiinduló átmérőt).

Akkor is derékszögű háromszöget kapunk – de egyértelműen –, ha MD' merőleges $D'D$-re, mert ekkor M-be esik B', és így C is; könnyű belátni ugyanis, hogy M csak derékszögű háromszögben esik a háromszög kerületére, és ekkor éppen a derékszög csúcsába.

Megemlítjük még a következőket: Ha M ugyanazon az oldalán van d-nek, mint D, akkor hegyesszögű háromszög adódik, ha pedig a másik oldalán, akkor a háromszög valamelyik szöge tompaszög. Ha D, M, D' egy egyenesbe esnek, egyenlő szárú háromszöget kapunk.

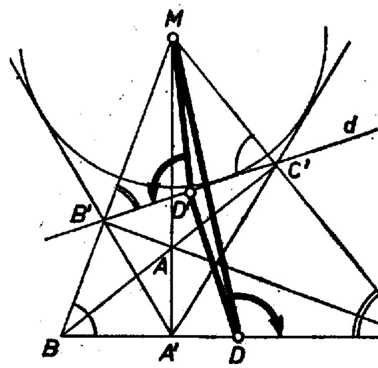
Szeredi Péter (Budapest, II. Rákóczi F. g. III. o. t.) és
Fencsik Gábor (Budapest, Berzsenyi D. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A szerkeszthetőség $D'M < DM$– másképpen $D'M : DM < 1$ – feltételére egyszerű értelmezés adható, felhasználva (1)-et és az $AB'C'$ és ABC háromszögek hasonló voltát (lásd III. megoldás):

$$\frac{D'M}{DM} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AB} = |\cos\alpha| < 1,$$

különben α nem létezik.

2. B'-t és C'-t d-ből kimetszhetjük a D és D' alappontokhoz és a $DM : D'M$ arányhoz tartozó Apollóniosz-körrel is. E kör egy átmérőjének végpontjait a DD' egyenesből a DMD' háromszög M-ből kiinduló belső és külső szögfelezője metszi ki.



2. ábra

II. megoldás. (vázlat). Az $MB'C'$ és MCB háromszögek fent kimondott hasonlóságához hozzátesszük, hogy tükrösen hasonlók, csúcsaikat a fenti sorrendben, a páronkénti megfelelés rendjében körüljárva ellentétes irányú körüljárásokat kapunk (1–2. ábrák 3 esete). Tükrösen hasonlók e két háromszögnek a megfelelő MD', MD súlyvonalak két oldalán levő részei is, pl. az $MD'B'$ és MDC háromszögek, ezért $MDC\sphericalangle = MD'B'\sphericalangle$, és forgásirányuk ellentétes (a megfelelő félegyenesek mindig a DD' egyenes ugyanazon oldalán vannak). Ennek alapján a d és $D'M$ egyenesek közti egyik szögnek a DM félegyenes mellé való alkalmas átmásolásával megkapjuk a BC egyenest. M vetülete ezen az A-ból húzott magasság A' talppontja.

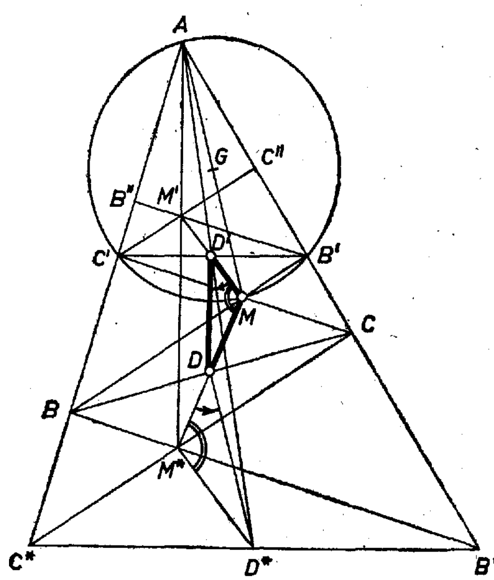
Felhasználjuk még, hogy a (nem derékszögű) háromszöghöz tartozó talpponti háromszög egyik érintő körének középpontja M. Abból adódik ez, hogy a talpponti háromszög belső és külső szögeinek felezői az eredeti háromszög oldalegyenesei és magasságegyenesei.[1] Az M közepű érintő kör az I. megoldásbeli d oldalegyeneshez megszerkeszthető, a hozzá A'-ből húzott két érintő a talpponti háromszög további két oldalegyenese, d-ből kimetszik B'-t, C'-t, tovább az I. megoldás szerint haladhatunk.

Az elemzésben csak vázolt állítások és a szerkesztés helyessége bizonyítását, valamint a diszkussziót az olvasóra kell hagynunk.

Inczédy János (Vác, Sztáron S. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Az, hogy MDC és $MD'B'$ tükrösen hasonlók, azt jelenti, hogy az utóbbi háromszög pl. egy alkalmas M középpontú nyújtással (vagy összehúzással) az előbbivel egybevágó, tükrös helyzetű háromszögbe vihető át. Így a BC egyenes irányát megkaphatjuk, ha d-t pl. az egymásnak megfelelő MD és MD'irányok szögfelezőjére tükrözzük.

Herényi István (Budapest, I. István g. IV. o. t.)



3. ábra

III. megoldás (vázlat). Elsőnek az A csúcsot szerkesztjük meg. Legyen M tükörképe D'-re M' (3. ábra), Így $B'MC'M'$ paralelogramma, $B'M' \parallel C'M$, ezért $B'M' \perp AC'$, ugyanígy $C'M' \perp AB'$, tehát M' az $AB'C'$ háromszög magasságpontja. $AB'C'$ és ABC hasonló háromszögek (lásd az 1–2. ábrákat is), mert A-nál levő szögük vagy közös vagy csúcsszöge egymásnak, továbbá B-nél és B'-nél levő szögük a kerületi szögek tétele szerint egyenlő. A csúcsoknak a mondott sorrend szerinti körüljárása ellentétes irányú, hiszen a vesszős csúcsok az A-nál levő szög másik száregyenesén

[1] Tompaszögű háromszög esetére lásd a szögek számítását pl. gyakorlatban, K. M. L. 32 (1966) 66. o.

vannak, vagy mindkettő azon az oldalán A-nak, mint B és C vagy ($\alpha > 90^\circ$ esetén) mindkettő a csúcsszög szárain. (A tükrös hasonlóság tengelye a BAC szög felezője:)

Legyen M tükörképe D-re M^*, és messe a BM^* egyenes AC-t B^*-ban, CM^* az AB-t C^*-ban. Így $BMCM^*$ paralelogramma, és $B^*B \perp AB$, $C^*C \perp AC$, M^* az AB^*C^* háromszög magasságpontja. Ebből a háromszögből ugyanúgy keletkezik ABC, mint ABC-ből $AB'C'$, tehát AB^*C^* is ellentétes körüljárással hasonló ABC-höz, ennélfogva azonos körüljárással hasonló az $AB'C'$ háromszöghöz. Mivel A csúcsuk közös, és itt fut össze B^*B' és C^*C', azért AB^*C^* és $AB'C'$ az A középpontra nézve hasonló helyzetűek is. Eszerint M^*M' átmegy A-n, és ugyanez áll a B^*C^* oldal D^* felezőpontját D'-vel összekötő egyenesre, hiszen a hasonló helyzetű háromszögek megfelelő pontjait összekötő egyenesek átmennek a hasonlóság középpontján. Eszerint elég D^*-t megszerkeszteni. Ez két szögmásolással adódik abból, hogy D^*M^*D háromszög az utóbbi hasonlóságban a DMD' háromszög megfelelője, és ezek is ellentétes körüljárásúak; ezért $D^*M^*D\sphericalangle = DMD'\sphericalangle$, az M^*D^* félegyenes párhuzamos és ellentétes irányú MD'-vel, továbbá $D^*DM^*\sphericalangle = DD'M\sphericalangle$, és forgási irányuk ellentétes.

A ismeretében az AM átmérő fölötti Thalész-körrel d-ből kimetszhetjük B'-t és C'-t, és tovább az I. megoldás szerint haladhatunk. Felhasználhatjuk azt is, hogy AM-nek G felezőpontja az ABC háromszög Feuerbach-körének D-vel átellenes pontja (ugyanis az AA' magasság talppontja is rajta van ezen a körön, és $GA' \perp A'D$), ezért a DDG átmérőjű körrel is kimetszhetők a B', C' pontok. Vagy az AM-re D-n át állított merőlegesben megkaphatjuk a BC egyenest (II. megoldás).

A bizonyítást és a diszkussziót hely hiányában az olvasóra kell hagynunk.

Deák Jenő (Budapest, Kölcsey F. g. IV. o. t.)