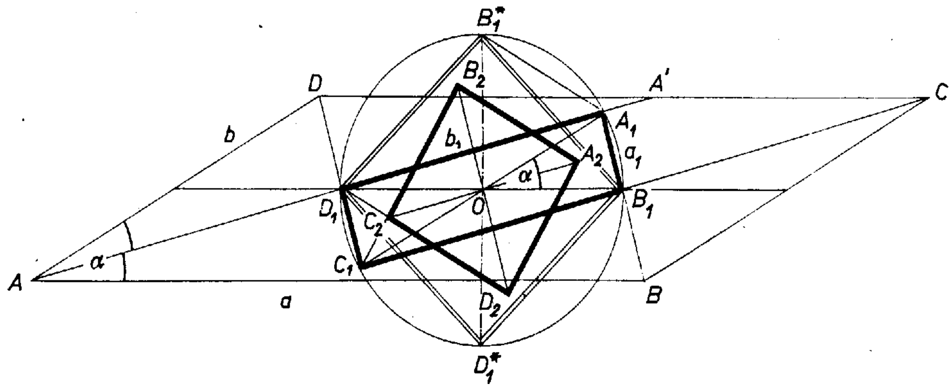
Elég azzal az esettel foglalkozni, ha N_0 oldalai különbözők, hiszen rombuszból kiindulva már N_1 is ponttá, az átlók metszéspontjává zsugorodik össze, és az állítás semmitmondóvá válik. Válasszuk a betűzést úgy, hogy $AB = a > AD = b$, és $BAD\sphericalangle = \alpha \leqq ABC\sphericalangle$ legyen (1. ábra).



1. ábra

Jelöljük A_1, B_1, C_1, D_1 betűvel N_1-nek rendre azt a csúcsát, ahol az AB, BC, CD, DA oldal végpontjaiból kiinduló szögfelezők metszik egymást. Megmutatjuk, hogy az N_1 négyszög téglalap, az átlói közti kisebb szög α, és átlóinak hossza $a - b$. Ugyanis az N_0 szomszédos csúcsaiból kiinduló szögfelezők merőlegesek egymásra, mert pl. az ADD_1 háromszög D_1-nél levő külső szöge egyenlő a CDA és a DAB szög felének összegével, ez pedig $90°$. D_1 egyenlő távol van az A-ból és D-ből kiinduló oldalaktól, tehát rajta van N_0-nak AB-vel párhuzamos középvonalán. Ugyanez áll B_1-re, mert ez D_1 tükörképe N_0-nak O középpontjára nézve, tehát a B_1D_1 átló párhuzamos AB-vel; hasonlóan $A_1C_1 \parallel AD$, ezek szerint O az N_1-nek is középpontja. – A mondott középvonalnak D_1 és az AD oldal közé eső szakasza az ADA' háromszög középvonala – ahol A' az AD_1 szögfelező metszéspontja a CD oldallal –, így a hossza $DA'/2 = b/2$, ezért $B_1D_1 = a - b$; továbbá $B_1OA_1\sphericalangle = \alpha$.

Bizonyításunkban N_0 és N_1 helyére N_1-et, ill. N_2-t írva, azt kapjuk, hogy N_2 olyan téglalap, amelyben az átlók közti szögek egyenlők az N_1 csúcsainál levő szögekkel – vagyis N_2 négyzet –, az átlók hossza pedig egyenlő N_1 oldalai különbségének abszolút értékével: $A_2C_2 = |a_1 - b_1|$. Így N_2 területe:

$$t_2 = \frac{A_2C_2^2}{2} = \frac{(a_1 - b_1)^2}{2} = \frac{a_1^2 + b_1^2}{2} - a_1b_1 = \frac{A_1B_1^2 + A_1D_1^2}{2} - a_1b_1 = \frac{B_1D_1^2}{2} - a_1b_1. \tag{1}$$

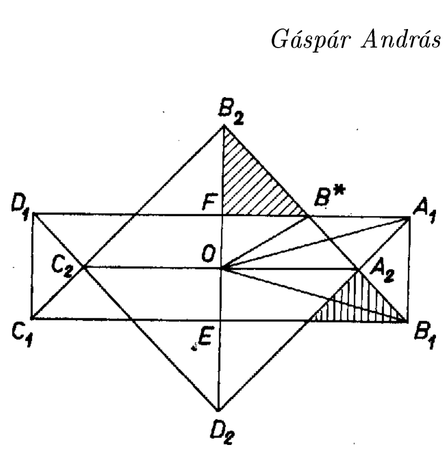
Itt a második tag egyenlő N_1-nek t_1 területével, és az első tag is értelmezhető területként, egyenlő a B_1D_1 mint átló fölé szerkesztett $B_1B_1^*D_1D_1^* = N_1^*$ négyzet t_1^* területével. Eszerint B_1^*, D_1^* az N_1 köré írt körben a B_1D_1-re merőleges átmérő végpontjai; válasszuk a jelölést úgy, hogy $A_1B_1^* < A_1D_1^*$ legyen.

Ha mármost $\alpha = BAD\sphericalangle = B_1OA_1\sphericalangle = 30°$, akkor $OA_1B_1^*$ egyenlő oldalú háromszög, ezért B_1^* 2-szer akkora távolságra van OB_1-től, mint A_1, tehát N_1^* területe 2-szer akkora, mint N_1-é, $t_1^* = 2t_1$, és (1)-ből

$$t_2 = 2t_1 - t_1 = t_1.$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

Gáspár András (Budapest, Vasútgépészeti techn. III. o. t.)



2. ábra

Megjegyzések. 1. Más úton bizonyítjuk, hogy ha egy téglalap átlóinak szöge $30°$, akkor területe egyenlő a szögfelezői által határolt négyzet területével. Tükrözzük az OA_2 egyenest OA_1-re mint tengelyre, és messe a kép A_1D_1-et B^*-ban (2. ábra). Így $A_1OB^*\sphericalangle = A_1OA_2\sphericalangle = OA_1B^*\sphericalangle$ és $A_2OB^*\sphericalangle = 2 \cdot A_2OA_1\sphericalangle = B_1OA_1\sphericalangle = 30° = OB^*F\sphericalangle$, tehát egyrészt OA_1B^* egyenlő szárú háromszög, másrészt OB^*F fele egy egyenlő oldalú háromszögnek. Ezért $A_1B^* = OB^* = 2 \cdot FO = FE = A_1B_1$ s mivel még $B_1A_1B^*\sphericalangle = 90°$, azért B^* rajta van a B_1B_2 szögfelezőn. Vegyük egységnek OF-et, így $FB^* = \sqrt{3}$, $A_1B^* = 2$ és $t_1 = A_1B_1 \cdot A_1D_1 = 2(4+2\sqrt{3})$, másrészt A_2 felezi B_1B^*-ot, ezért $OA_2 = FB^* + B^*A_1/2 = \sqrt{3}+1$, és $t_2 = 2 \cdot OA_2^2 = 2(4+2\sqrt{3}) = t_1$, qu. e. d.

Ezek után az N_1 és N_2 területének egyenlősége abból is adódik, hogy a közös részükből kinyúló rész N_1-ben 6, N_2-ben 4 egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszögre bontható, befogóik hossza $\sqrt{2}$, ill. $\sqrt{3}$, területeik aránya $2:3$, azaz $4:6$, így pedig a kinyúló területek egyenlők.

Tusnády Gábor

2. A versenyzők szinte kivétel nélkül trigonometriai számítással bizonyították az állítást; ezt vázoljuk. N_1 területe 4-szer akkora, mint az OA_1B_1 háromszögé, oldalai pedig $\alpha/2$-vel fejezhetők ki:

$$t_1 = 4 \cdot \frac{(a-b)^2 \sin\alpha}{2 \cdot 4},$$
$$b_1 = A_1D_1 = (a-b)\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad a_1 = A_1B_1 = (a-b)\sin\frac{\alpha}{2},$$

így N_2 átlói, majd területe, átalakítások után, majd a két terület aránya

$$A_2C_2 = (a-b) \cdot \left|\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right|, \quad t_2 = \frac{1}{2}A_2C_2^2 = \frac{(a-b)^2(1-\sin\alpha)}{2}, \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha},$$

és ez $\alpha = 30^\circ$ esetén 1.– Eszerint α kellő megválasztásával a t_1/t_2 arány tetszés szerinti k értéket felvehet, ti. ha

$$\sin\alpha = \frac{k}{k+1}.$$

Deák Jenő (Budapest, Kölcsey F. g. IV. o. t.)