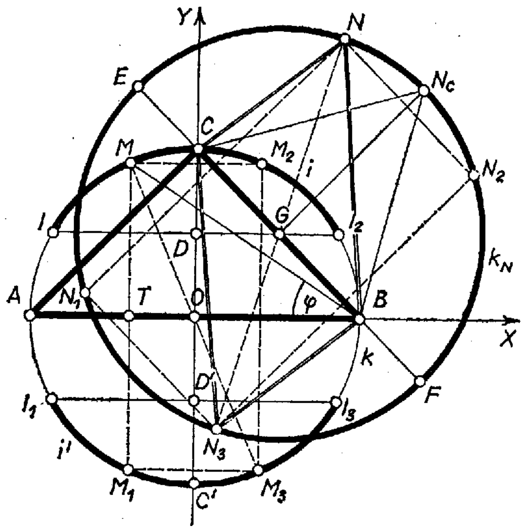
I. rész. Az M által leírt k kör középpontja az AB szakasz O felezőpontja, sugara OA, és C az AB-re merőleges átmérő egyik végpontja. Ezért elég M-et pl. az AC negyedíven végigfuttatni, hiszen ekkor AB-re és OC-re mint tengelyre, valamint O-ra mint középpontra vett tükörképei – rendre M_1, M_2, M_3 – leírják k további három negyedívét, és az M_jA, M_jB szakasz–pár ($j = 1, 2, 3$) megegyezik az MA, MB párral. Így pedig az M_j helyzethez akkor és csak akkor szerkeszthető meg a kívánt háromszög, ha M-hez megszerkeszthető.



A választott negyedkörív pontjaira $MA \leqq CA = CB \leqq MB$, ezért a háromszög szerkeszthető voltának egyetlen feltétele:

$$MB < MA + BC, \qquad \text{azaz} \qquad MB - MA < BC. \tag{1}$$

Itt a bal oldal pozitív vagy 0, ezért az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, amikor a négyzetre emeléssel adódó egyenlőtlenség:

$$MB^2 + MA^2 - 2MB \cdot MA < BC^2. \tag{2}$$

Itt a kivonandó az ABM derékszögű háromszög területének 4-szerese, az első két tag összege pedig $AB^2 = 2BC^2$, ezért átrendezéssel és a területet az átfogóra vonatkozó MT magassággal kifejezve a feltétel

$$2 \cdot MB \cdot MA = 2 \cdot AB \cdot MT > AB^2 - BC^2 = \frac{AB^2}{2}, \tag{3}$$

amiből osztással ($AB > 0$ alapján)

$$MT > \frac{AB}{4} = \frac{OC}{2}. \tag{4}$$

Eszerint k-nak azokon az $II_2 = i$ és $I_1I_3 = i'$ ívein levő pontjai felelnek meg M-ként, amelyeket az AB-re merőleges $C'C$ átmérőt negyedelő D, D' pontokon át AB-vel párhuzamosan húzott szelők metszenek le. Az ívek végpontjai azonban már nem felelnek meg, mert ezekre (4)-ben egyenlőség áll fenn, és mivel azonos átalakításokat hajtottunk végre, visszamenve (1)-ben is egyenlőség áll, tehát elfajult háromszög jönne létre.

Bárány Imre (Budapest, Corvin Mátyás g. IV. o. t.)
dolgozata alapján

II. rész. M-nek egy az i-n levő helyzetéhez N részére két helyzet adódik, N és N_1, ezek a BC tengelyre nézve tükrös pontpárt alkotnak. Ugyanez a pontpár adódik ki M-nek fenti M_1 tükörképéből is. Az M-nek fenti M_2 és M_3 tükörképeiből adódó N_2, N_3 pontpár viszont – az indexek kellő választásával – nyilvánvalóan N és N_1 tükörképe BC felező merőlegesére nézve. Így N_3 egyszersmind N tükörképe a BC szakasz G felezőpontjára nézve, tehát a $BNCN_3$ négyszög paralelogramma. Ebben az oldalak négyzetösszege $2(NB^2 + NC^2) = 2(MB^2 + MA^2) = 2 \cdot AB^2 = 4BC^2$ állandó, úgyszintén a BC átló négyzete is állandó. Ezért ismert tétel szerint[1] az $NN_3 = 2NG$ átló négyzete is állandó és $3BC^2$-tel egyenlő. Ezért NG egyenlő $\sqrt{3}BC/2$-vel, a BC oldal fölé szerkesztett BCN_c egyenlő oldalú háromszög N_cG magasságával (N_c akkor adódik, ha M a C-ben van), és így N mindig a G körül GN_c sugárral írt k_N körön van.

[1] Paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével. Lásd legutóbb 1040. gyakorlat, K. M. L. 33 (1966. nov.) 152. o.

Megmutatjuk, hogy míg M befutja i-t, N a k_N kör minden pontjába eljut. M számára most már i és i_1 fent kizárt végpontjai is figyelembe veendők, mert a követelmény nem írja elő, hogy N, B és C valódi háromszöget alkossanak. M-et I-ben, majd I_2-ben választva (1)-ben egyenlőség áll, N a k_N kör BC-n levő átmérőjének E, ill. F végpontjában adódik ($FB = EC < EB = FC$). A körön tetszés szerint választott N-re nézve így BN hossza BF és BE hossza közé esik, CN-é pedig CE és CF közé, vagyis mindkettő $AI = BI_2$ és $AI_2 = BI$ hossza közé, így az N-et előállító M pontot k-ból akár az A körüli CN sugarú, akár a B körüli BN sugarú körrel kimetszhetjük, hiszen e két kör $BN^2 + CN^2 = BM^2 + AM^2$ miatt ugyanabban a pontban metszi k-t.

Ezek szerint N pályája a k_N kör.

Megjegyzés. III–IV. osztályos versenyzőink frissebb ismeretanyaguk, a trigonometria és a koordináta–geometria eszközeivel vizsgálták a feladat II. részét, erre tekintettel vázolunk egy ilyen típusú megoldást is.

Legyen $MBA\sphericalangle = \varphi \quad (0° \leqq \varphi \leqq 90°)$, és $AB = 1$; ekkor $MA = \sin\varphi$, $MB = \cos\varphi$, $BC = \sin 45°$, és (1) második alakjából

$$\cos\varphi - \sin\varphi = \cos\varphi - \cos(90° - \varphi) = 2\sin 45° \sin(45° - \varphi) < \sin 45°,$$
$$\sin(45° - \varphi) < 1/2, \qquad 45° - \varphi < 30°, \qquad \varphi > 15°, \qquad MOA\sphericalangle = 2\varphi > 30°,$$

és így $MO > MC$, ill. $MO > MC'$.

Legyen továbbá egy derékszögű koordinátarendszer X-tengelye az OB, Y-tengelye az OC egyenes, A, B, C, M és N koordinátái rendre:

$$A\,(-1/2,\,0), \quad B\,(1/2,\,0), \quad C\,(0,\,1/2), \quad M\,(x_0, \pm\sqrt{1/4 - x_0^2}), \quad N\,(x,\,y).$$

Ezekkel $CN^2 = AM^2$-ből

$$x^2 + (y - 1/2)^2 = (x_0 + 1/2)^2 + (1/4 - x_0^2) = x_0 + 1/2,$$

$BN^2 = BM^2$-ből

$$(x - 1/2)^2 + y^2 = (x_0 - 1/2)^2 + (1/4 - x_0^2) = -x_0 + 1/2,$$

és x_0 kiküszöbölésével (összeadással)

$$2x^2 - x + 2y^2 - y = 1/2, \qquad (x - 1/4)^2 + (y - 1/4)^2 = 3/8,$$

vagyis N pályája a $G(1/4,\,1/4)$ pont – BC felezőpontja – körüli $\sqrt{3}/2\sqrt{2} = \sqrt{3} \cdot BG$ sugarú kör, vagy ennek része.

Most még bizonyítani kellene, hogy N ezt az egész körkerületet befutja, ami ezen a módon nehézkesebb volna.