A szöget ívmértékben értjük, mint goniometriai egyenleteknél általában. Az ilyen típusú egyenletek megoldására, amelyekben szögfüggvények mellett a szög is szerepel, általában. közelítő módszerek vezetnek célhoz, egy első közelítés meghatározására pedig gyakran jól használható a grafikus ábrázolás. Itt is függvények grafikus képére támaszkodva határozzuk meg a megoldások számát.

$\sin x$ csak -1 és 1 közti értékeket vesz fel, ezért csak azok az x értékek jönnek tekintetbe, amelyekre

$$x \leqq 3142 + 157 = 3299 \qquad \text{és} \qquad x \geqq -3142 + 157 = -2985. \tag{2}$$

Jobb áttekinthetőség kedvéért írjuk az egyenletet

$$\sin x = \frac{x - 157}{3142} \tag{1a}$$

alakban. A jobb oldali elsőfokú kifejezést jelöljük $e(x)$-szel. Ennek képe az e egyenes. Amíg $e(x) \leqq 0$, azaz $x \leqq 157$, addig az egyenes a $\sin x$ görbének csak az X-tengely alatti, tehát a

$$(2k-1)\pi \leqq x \leqq 2k\pi \quad (k \text{ egész szám}) \tag{3}$$

alakú intervallumokhoz tartozó íveit metszheti át; $e(x) \geqq 0$, azaz $x \geqq 157$ esetén viszont csak az X-tengely fölötti íveit, vagyis ahol

$$2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi. \tag{4}$$

Minden X-tengely alatti ívet átmetsz az egyenes, amíg

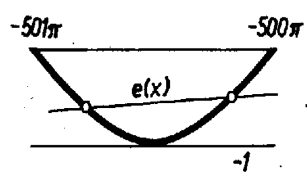
$$-2985 \leqq (2k-1)\pi \quad \text{és} \quad 2k\pi \leqq 157, \quad \text{azaz}$$

$$-\frac{2985}{2\pi} + \frac{1}{2} \leqq k \leqq \frac{157}{2\pi}, \qquad -474{,}57\ldots \leqq k \leqq 24{,}98\ldots, \tag{5}$$

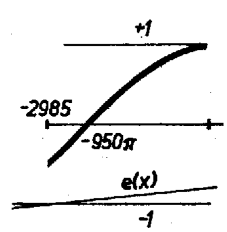
mert így a (3) végpontjaiban $\sin x = 0 > e(x)$, a felezőpontban viszont

$$\sin\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi = -1 = e(-2985) < e\left(\left[2k - \frac{1}{2}\right]\pi\right) < 0,$$

és a metszéspontok száma minden ilyen íven 2, mert az X-tengely (3) intervalluma és az ív konvex tartományt határol, az ilyennek a határát pedig az egyenes, ha metszi, akkor 2 pontban metszi (1. ábra; az $e(x)$-szel jelölt egyenes meredeksége, jobb szemlélet érdekében jóval nagyobb a helyes $1/3142 \approx 0{,}00032$ értéknél). (5)-nek a $k = -474,\ -473,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 24$ értékek tesznek eleget, ezek 499 ívet, és rajta 998 metszéspontot adnak.



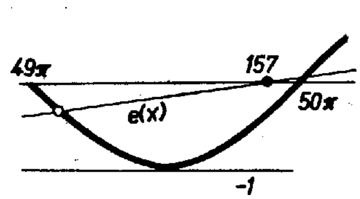
1. ábra



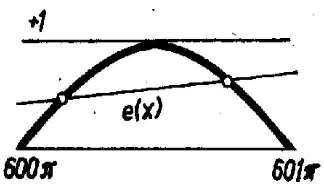
2. ábra

(2)-nek eleget tesz a (3) alakú intervallumok közül a $k = -475$-höz tartozónak a $(-2985,\ -950\pi = -2984{,}51\ldots)$ részintervalluma is, ebben azonban nincs metszés, mert a hossza rövidebb, mint $\pi/2 = 1{,}57\ldots$, a $-950{,}5\pi$ felezőpont már nem esik a részintervallumba (2. ábra).

Az $x = 157$ érték pedig a $k = 25$-höz tartozó (3) alakú intervallumba esik, mert $49\pi = 153{,}9\ldots < 157$. Ennek az intervallumnak a kezdő és a felezőpontjában is érvényes a fenti megállapítás, ezért e az ehhez az intervallumhoz tartozó konvex tartományt is átmetszi, de a metszéspontok közül csak az első esik a görbe határvonalra, a második az X-tengely intervallumára (3. ábra). Az eddigiek szerint míg $x \leqq 157$, a metszéspontok száma 999.



3. ábra



4. ábra

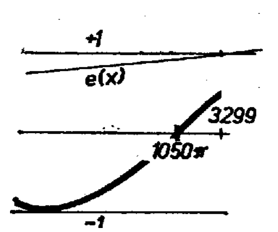
Hasonlóan az e egyenes minden az X-tengely fölötti ívét átmetszi a $\sin x$ görbének, amíg

$$157 \leqq 2k\pi \qquad \text{és} \qquad (2k+1)\pi \leqq 3299, \qquad \text{azaz}$$

(6) $$\frac{157}{2\pi} \leqq k \leqq \frac{3299}{2\pi} - \frac{1}{2}, \qquad 24{,}98\ldots \leqq k \leqq 524{,}55\ \ldots,$$

mert a (4) intervallumok végpontjaiban $\sin x = 0 < e(x)$, a felezőpontokban $\sin\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi = 1 = e(3299) > e\left(\left[2k+\frac{1}{2}\right]\pi\right) > 0$, és minden íven 2 metszéspont van, mert a (4) alakú intervallum és a fölötte levő ív konvex tartományt határol. (6)-nak a $k = 25,\ 26,\ \ldots,\ 524$ értékek tesznek eleget, így 500 ívet és 1000 metszéspontot kapunk (4. ábra).

(2)-nek eleget tesz még a $k = 525$-höz tartozó (4) alakú intervallumnak $(1050\pi = 3298{,}57\ \ldots,\ 3299)$ részintervalluma is (5. ábra), hossza kisebb $\pi/2$-nél, így benne nem éri el $\sin x$ az $1 = e\,(3299)$ értéket, nincs metszéspont.



5. ábra

Mindezek szerint az e egyenes a $\sin x$ görbét 1999 pontban metszi, ennyi tehát az (1) egyenlet megoldásainak száma.

Fencsik Gábor (Budapest, Berzsenyi D. g. III. o. t.)

Dabóczi Ákos (Budapest, Fáy A. g. III. o. t.)