

631. Állandó feszültségű áramforrás sarkait síksűrítő fegyverzeteivel kötjük össze. Ha a sűrítő fegyverzetei, melyek között levegő van, közelebb jutnak egymáshoz, a sűrítő töltésének energiája megnagyobbodik.

a) Közelítéskor mennyivel növekszik a sűrítő energiája és mennyi energiát ad le eközben az áramforrás?

b) Mennyivel változik a sűrítő energiája, ha a fegyverzetek akkor közelednek, miután az áramforrással való összeköttetésük már megszakadt?

Megoldás. Jelölje V az áramforrás állandó feszültségét, ill. a sarkaival összekötött sűrítő fegyverzetek potenciálkülönbségét, továbbá C_1 ill. C_2 a sűrítő kapacitását a fegyverzetek közeledése előtt, ill. után, E_1 , ill. E_2 a sűrítő energiáját, e_1 ill. e_2 a sűrítő töltését, d_1 , ill. d_2 a fegyverzetek távolságát az első, ill. a második helyzetben, végül F a fegyverzet felületét.

A sűrítő energiája: $E = \frac{1}{2} Ve = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C}$ és $C = \frac{F}{4\pi d}$.

a) Közeledés előtt $E_1 = \frac{1}{2} C_1 V^2$. Ha a fegyverzetek közeledése közben az áramforrás sarkaival való összeköttetés megmarad, akkor közeledés közben a fegyverzetek potenciálkülönbsége állandó marad, csak a kapacitás változik és így $E_2 = \frac{1}{2} C_2 V^2$. Minthogy $d_2 < d_1$, azért $C_2 > C_1$, tehát $E_2 > E_1$; a sűrítő (helyzeti) energiája növekszik és ezen növekedés

$$E_2 - E_1 = \frac{1}{2} V^2 (C_2 - C_1) = \frac{FV^2}{8\pi} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) > 0.$$

Az áramforrás által leadott energia eközben¹

$$W = Vit = V(e_2 - e_1) = V(C_2 V - C_1 V) = V^2 (C_2 - C_1),$$

azaz az áramforrás által leadott energia a sűrítő energia növekedésének kétszerese.

b) Ha az áramforrással való összeköttetést megszüntetve, közelednek egymáshoz a sűrítő fegyverzetei, akkor a fegyverzetek potenciálkülönbsége csökken, az elektromos töltés marad ugyanaz, $e_1 = e_2 = e$ (a kapacitás növekszik).

Most az $E = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{C}$ kifejezésből következik, hogy E csökken:

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{C_1}, \quad E_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{C_2}, \quad E_2 - E_1 = \frac{1}{2} e^2 \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right),$$

$$E_2 - E_1 = \frac{1}{2} e^2 \left(\frac{4\pi d_2}{F} - \frac{4\pi d_1}{F} \right) = \frac{2\pi e^2}{F} (d_2 - d_1) < 0.$$

Kiegészítés. Láttuk, hogy az a) esetben az áramforrás akkora energiát ad le, amekkora a sűrítő energianövekedésének kétszerese. Az áramforrás által leadott energia fele a sűrítő energianövekedésére szolgál, a másik fele azonban munkavégzésre; ezen munka a fegyverzetek közeledése közben végeztetik, a fegyverzetek közötti elektromos erő által.

Síksűrítő fegyverzetei közötti vonzó erő: $p = \frac{2\pi e^2}{F}$.²

Ha a fegyverzetek közti távolság tetszőleges helyzetben x , akkor

$$e = CV = \frac{F}{4\pi x} V \quad \text{és} \quad \frac{2\pi e^2}{F} = \frac{2\pi}{r} \cdot \frac{F^2 V^2}{16\pi x^2} = \frac{FV^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Ha az x távolság d_1 -ről d_2 -re csökken, az elektromos erő által végzett munka

$$L = - \int_{d_1}^{d_2} \frac{FV^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{x^2} dx = - \frac{FV^2}{8\pi} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{FV^2}{8\pi} \left[-\frac{1}{x} \right]_{d_1}^{d_2}$$

$$L = \frac{FV^2}{8\pi} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right).$$

Ezen L munka megegyezik az a) alatti $E_2 - E_1$ értékével!

A b) esetben a sűrítő energia csökkenése munkavégzésre fordítatik; ugyanis ezen munka most

$$L' = \frac{2\pi e^2}{F} (d_1 - d_2) = -(E_2 - E_1).$$

A beérkezett megoldások az a) alatti kérdés második részére nem adnak kielégítő választ.

¹ i az áram intenzitását jelenti, it az elektromos töltés, amelyet a közeledés t ideje alatt a fegyverzetek kapnak, tehát a töltés növekedését jelenti és ez $e_2 - e_1$.

² L. Roiti: A fizika elemei II. k. 374. o.

632. Mekkora a tömege 1 m^3 vízgőzt tartalmazó levegőnek 25°C -on és 755 mm nyomáson, ha a vízgőz nyomása 18 mm ? Egy m^3 normális állapotú száraz levegő tömege $1,293 \text{ kg}$ és a gőznek az ugyanolyan állapotjelzőkkel bíró levegőre vonatkoztatott sűrűsége $0,62$.

Megoldás. Az 1 m^3 térfogatú nedves levegő tömege két részből: a száraz levegő és a vízgőz tömegéből áll.

A száraz levegő állapotjelzői: $t = 25^\circ$, $v_t = 1 \text{ m}^3$, $p_t = 755 - 18 = 737$.

Ezen levegő tömege:³

$$m_l = v_0 s_0 = \frac{v_0 p_t}{p_0(1 + \alpha t)} s_0 = \frac{1 \cdot 737 \cdot 1,293 \cdot 273}{760 \cdot 298}.$$

A vízgőz állapotjelzői: $t = 25^\circ$, $v_t = 1 \text{ m}^3$, $p'_t = 18$. A vízgőz tömege

$$m_g = v_0 s'_0 = \frac{v_0 p'_t s'_0}{p_0(1 + \alpha t)} = \frac{1 \cdot 18 \cdot 1,293 \cdot 0,62 \cdot 273}{760 \cdot 298}.$$

A nedves levegő tömege

$$m = m_l + m_g = \frac{1,293 \cdot 273}{760 \cdot 298} (737 + 18 \cdot 0,62) = \frac{1,293 \cdot 273 \cdot 748,16}{760 \cdot 298}.$$

$$m = 1,166 \text{ kg}.$$

Than Károly (Kegyesrendi g. VIII. o. Bp.)

III.

633. Acélhuzalon függő homogén fémhenger torzió lengéseket végez. Hogyan változik a lengési idő?

a) ha a henger mindkét mérete kétszer akkora lesz?

b) ha a huzal két mérete lesz kétszer akkora?

c) ha mindkettőnek a méretei kétszer akkorák lesznek?

Megoldás. Az egyszerű torziós lengési idő

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{\tau}},$$

ahol K az inga tehetetlenségi nyomatéka és τ az acélhuzal torziós momentuma.

Ha a fémhenger tengelye függőleges, akkor $K = \frac{MR^2}{2}$, ahol M a henger tömege és R a henger sugara. Továbbá

$\tau = \frac{r^4}{kl}$, ahol r az acélhuzal sugara, l a hossza és k a huzal torzióját jellemző állandó.

a) Ha a henger méretei kétszeresek lesznek, akkor tömege 8-szor, sugarának négyzete 4-szer és így a tehetetlenségi nyomatéka $8 \times 4 = 32$ -szer lesz nagyobb, míg τ ugyanakkora marad. Így a lengésidő $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ -ször nagyobb: $t_1 = 4\sqrt{2}t \sim 6,559t$.

b) Ha a huzal méretei lesznek kétszerakkorák, akkor τ számlálója 2^4 -szer, nevezője 2-szer és így τ maga $2^3 = 8$ -szor nagyobb. A lengési idő $\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ -szerese lesz az eredetinek: $t_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}t \sim 0,3535t$.

c) Ha úgy a huzal, mint a henger méretei kétszeresződnek, akkor a lengésidő kifejezésében, a négyzetgyök alatti tört számlálója 32, nevezője 8-szor, maga a tört 4-szer és így a négyzetgyök értéke 2-szer lesz nagyobb: $t_3 = 2t$.

Ugyanezen eredményre jutunk, ha a henger tengelye vízszintes.

Gállik István (premontrei g. VIII. o. Gödöllő.)

³ s_0 az 1 m^3 normális állapotú levegő tömege. Az 1 m^3 ugyanilyen állapotú vízgőz tömege $s'_0 = 0,62s_0$.