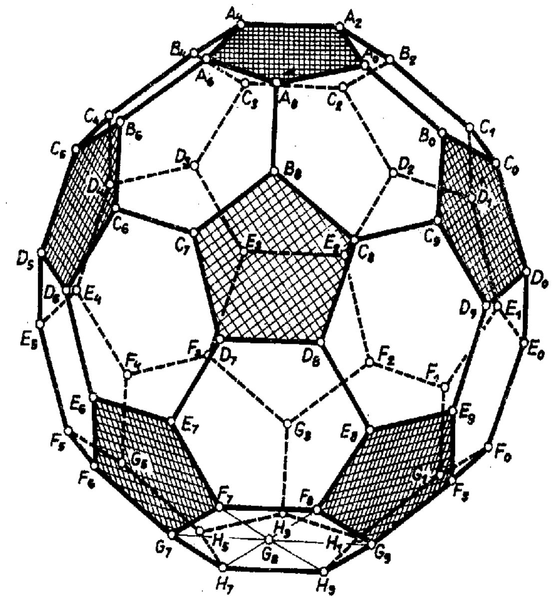


1. ábra

I. Az állításokat az F_7F_8 élre bizonyítjuk. A lapok szabályos és egybevágó voltából és a poliéder felépítésének elvéből következik, hogy bizonyításunk bármely élre érvényes.

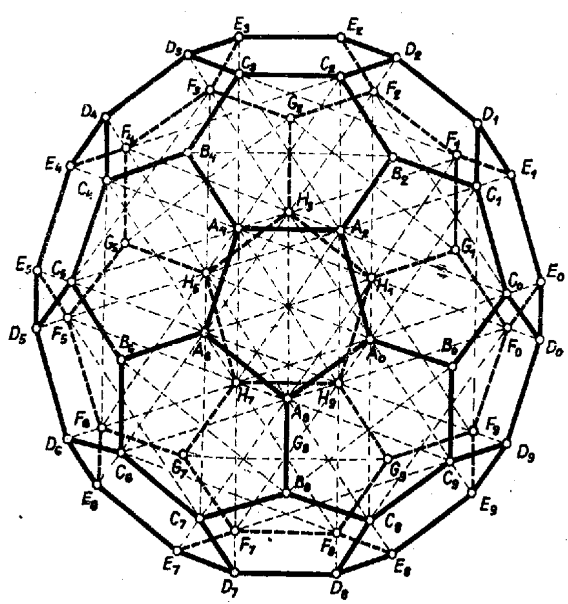
A lapok szabályos voltából következik, hogy F_7F_8-cal párhuzamos a benne csatlakozó két hatszöglapnak vele szemben levő D_7D_8, ill. H_7H_9 éle, valamint az első hatszöglaphoz D_7D_8 mentén csatlakozó ötszöglap C_7C_8 átlója. Ugyanígy adódik, hogy $A_6A_0 \parallel A_4A_2 \parallel C_3C_2 \parallel E_3E_2$. Másrészt $C_7C_8 \parallel A_6A_0$, mert $A_6C_7 \# A_0C_8$, hiszen hatszöglapok leghosszabb átlói, és párhuzamosak az A_8B_8 éllel. Ezek szerint a poliéder következő 6 éle párhuzamos:

$$(1) \qquad H_7H_9, \quad F_7F_8, \quad D_7D_8, \quad A_4A_2, \quad C_3C_2, \quad E_3E_2.$$

Nem volt lényeges, hogy két egynemű lap közös éléből indultunk ki; hiszen a 6 párhuzamos él közül 4-ben 1 hatszöglap és 1 ötszöglap csatlakozik egymáshoz.

Az A_8B_8 él benne van a C_7C_8 lapbeli átló S felező merőleges síkjában, mert végpontjai egyenlő távol vannak C_7-től és C_8-tól, ugyanis A_8C_7 és A_8C_8 a hatszöglap rövidebb átlói. Ezért A_8B_8 merőleges C_7C_8-ra és a vele párhuzamos F_7F_8-ra. Ugyanígy adódik, hogy $E_9F_9 \perp F_7F_8$. Mármost A_8B_8-hoz is, E_9F_9-höz is a fentiekhez hasonlóan felsorolható további 5–5, velük párhuzamos éle a poliédernek és a két felsorolásban egy él sem ismétlődik; ezekben megtaláltuk a poliédernek F_7F_8-ra merőlegesen álló 12 élét:

$$(2) \qquad \begin{array}{llllll} B_0C_9, & A_8B_8, & B_6C_6, & F_4G_5, & G_3H_3, & F_1G_1; \\ C_1D_1, & D_0E_0, & E_9F_9, & E_6F_6, & D_5E_5, & C_4D_4. \end{array}$$



2. ábra

II. Tekintsük a rajzsíkon adottnak az 1. ábra $H_1H_3H_5H_7H_9 = H$ ötszöglapját (2. ábra). A vetületnek H síkján leendő megszerkesztésében a fentieken túl felhasználjuk a következőket. S az (1) élek mindegyikét merőlegesen felezi – úgyszintén a következő, velük párhuzamos lapbeli átlókat is:

(3)	C_7G_9,	E_7E_8,	B_4B_2,	D_3D_2;
(4)	C_7C_8,	A_6A_0,	F_3F_2,	H_5H_1,

hiszen szabályos sokszög bármely oldalának, átlójának felező merőleges egyenese a sokszögnek szimmetriatengelye, és felező merőleges síkja a sokszögnek szimmetriasíkja. Így S merőleges H síkjára, és átmegy a H_3G_3 élen.

Eszerint S-nek H síkján levő vetülete a H_7H_9 oldal felező merőlegese, vagyis átmegy H_3-on; az (1) élek vetülete a rajzsíkon H_7H_9-nek önmagára merőleges eltolásával áll elő, az előforduló, H_7-től és H_9-től különböző 10 csúcs vetülete rajta van a H_7H_9-re a végpontjaiban állított merőlegesek egyikén. Ugyanígy a (4) átlók végpontjaiként szereplő 6 új csúcs vetülete rajta van a H_5-ön, H_1-en át H_7H_9-re állított merőlegesek egyikén. Végül A_8, B_8, G_3 vetülete a H_3-on át H_7H_9 állított merőlegesen van rajta.

A mondott 5 merőleges a derékszögű háromszögvonalzó szokásos megtámasztásával, majd 90°-os elfordításával megrajzolható. Ezt H további oldalaival megismételve könnyű belátni, hogy a metszéspontok közül kiválasztható a következő 25 csúcs vetülete:

$$F_0,\ F_1, 1\ldots,\ F_9; \qquad C_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_9; \qquad A_0,\ A_2,\ \ldots,\ A_8,$$

pl. F_7 a H_7-en át H_7H_9-re és H_9-en át H_1H_3-ra állított merőlegesek metszéspontja, mert $F_7F_8 \# H_7H_9$ és (4)-höz hasonlóan $F_7F_6 \# H_9H_5 \parallel H_1H_3$; C_2 a H_5-ön át H_1H_3-ra és H_9-en át H_7H_9-re állított merőlegesek, A_0 pedig a H_1-en át H_7H_9-re és H_9-en át H_1H_3-ra állított merőlegesek metszéspontja, mert $A_0A_4 \# H_5H_9 \parallel H_1H_3$.

A megrajzolt merőlegesek további metszéspontjai között szerepel 10 hatszög lap középpontjának vetülete, mint a hatszög két párhuzamos oldalával meghatározott téglalap átlóinak metszéspontja. Ezen át mindig megrajzolható a hatszög hátra levő leghosszabb átlójának egyenese, és ez a korábbi egyenesekből kimetszi a

$$G_1,\ G_3, 1\ldots,\ G_9; \quad B_0,\ B_2,\ \ldots,\ B_8$$

csúcsok vetületét. Pl. H_7F_8 és H_9F_7 metszéspontján át (az ábrákon G_8) H_7H_9-cel párhuzamost húzva kapjuk a G_7G_9 átló végpontjait, a vetület H_7-en, ill. H_9-en átmenő tengelyén. (Elég 6-ot megrajzolni az ilyen átlók közül.)

A hátra levő D_i, E_i csúcsok ($i = 0,\ 1,\ \ldots\ 9$) vetületei közül D_1-ét. E_9-ét, E_6-t és D_4-ét (2) második sora alapján kapjuk abból, hogy ezeknek az éleknek a képe merőleges H_7H_9-re, mivel maguk az élek párhuzamosak S-sel és – mint majd belátjuk – nem merőlegesek H síkjára. Felhasználjuk C_1, F_9, F_6 és C_4 már meglevő képét. Pl. a C_1 képén át H_7H_9-re állított merőleges a H_1-en átmenő, H_1H_3-ra merőleges (már megrajzolt) egyenesből metszi ki D_1 képét (egyszersmind – mint a szimmetriából könnyen látható – E_9-et is, a H_3-on át H_3H_5-re állított merőlegesből). Innen látjuk, hogy C_1D_1 képe nem pont, hiszen C_1, D_1 képe különböző, de a H_1H_3-ra merőleges egyenesen van rajta. – A további D és E csúcsok vetületét hasonlóan megszerkesztve, a poliéder vetületének előállítását befejeztük (együttvéve 10 egyenes).

Valóban, csak párhuzamos és merőleges egyeneseket kellett rajzolnunk H csúcsain, valamint a közben adódott pontokon át (szám szerint 41-et). A csúcsok vetületeinek összekötésével kapjuk az élek vetületét (a 90 élből 30-nak a képe a szerkesztő egyeneseknek egy-egy szakasza).

Domokos László (Tatabánya, Árpád Gimn., IV. o. t.)
Babai László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A sportéletre való hivatkozással lényegében elfogadtuk a szóban forgó poliéder létezését. Ezt azonban a vetület megrajzolása sem bizonyítja. Mindjárt az is kételkedést támaszthat, hogy 1 ötszöglapnak és 2 hatszög lapnak egy csúcsba összeillesztése a lapok közti szögeket – vagy ami ezek számítását lehetővé teszi, egy csúcs távolságát a vele szomszédos csúcsba befutó harmadik lap síkjától – az 1454. feladatban[1]) látottakhoz hasonlóan egyértelműen meghatározza.

Önálló bizonyítás helyett gondoljuk át, hogy poliéderünk előállítható az 1472. feladatban[2] vizsgált (és bebizonyítottan létező) szabályos ikozaéderből úgy, hogy rendre vesszük az egy csúcsából kiinduló 5 él mindegyikén a hozzá közelebbi harmadoló pontot és az ezekkel meghatározott sík egyik oldalán előálló szabályos ötoldalú gúlát lemetsszük az ikozaéderből.

[1]Lásd ezen számban 102. o.
[2]K. M. L. 34 (1967. jan.) 19. o.