1339. *Bizonyítsuk be, hogy ha két racionális számnak összege és szorzata is egész szám, akkor e számok maguk is egészek.*

I. Megoldás. Segédtétel. Ha $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ *irreducibilis törtek és* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *akkor kell, hogy* $b=d$ *legyen.*

$\frac{a}{b}$ irreducibilis, ha a-nak és b-nek nincs közös osztója: $(a,b)\sim 1$[1]
Hasonlóan $(c,d)\sim 1$.

Ha $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, akkor

$$ad=bc,$$

azaz az ad szorzat osztható b-vel; minthogy $(a,b)\sim 1$ kell, hogy d legyen a b többszöröse.

Hasonlóan a bc szorzat osztható d-vel; azonban $(c,d)\sim 1$ kell, hogy b legyen d többszöröse.

A két megállapítás *csak úgy állhat* meg, ha $b=d$.

Legyenek már most $\frac{p}{q}$ és $\frac{r}{s}$ irreducibilis törtek úgy, hogy összegük és szorzatuk is egész szám. Tehát

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=E_1,\ldots \tag{1}$$

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=E_2.\ldots \tag{2}$$

1)-ből:

$$\frac{p}{q}=\frac{E_1s-r}{s},$$

ahol a jobboldal is irreducibilis tört; tehát $q=s$.
Tekintettel erre, 2)-ből $\quad \frac{pr}{q^2}=E_2,$

azaz pr a q^2 többszöröse. Minthogy azonban $(p,q)\sim 1$ és $(r,q)\sim 1$, kell, hogy $q=s=1$ legyen, tehát $\frac{p}{q}$ és $\frac{r}{s}$ egész számok.

Somogyi Antal (Gyakorló középiskola VIII. o. Bp.)

II. Megoldás. A két racionális szám összege legyen p, szorzatuk q. A két szám mindegyike gyöke az

$$x^2-px+q=0$$

egyenletnek, ahol p és q egész számok. Tegyük fel, hogy ezen egyenletnek gyökei valósak és az egyik gyök $\frac{r}{s}$, ahol r és s relatív prímszámok.[2] Ha $\frac{r}{s}$ kielégíti az egyenletet, akkor

$$\left(\frac{r}{s}\right)^2-p\left(\frac{r}{s}\right)+q=0 \quad \text{vagy} \quad r^2=s(pr-qs).$$

Eszerint r^2 az s többszöröse. Azonban $(r,s)\sim 1$ és így $(r^2,s)\sim 1$, tehát ellenmondásra jutottunk. Az ellenmondás csak akkor szűnik meg, ha $s=1$, tehát, ha $\frac{r}{s}$ egész szám.

Kell tehát, hogy az

$$x^2-px+q=0$$

egyenlet valós és racionális gyökei egész számok legyenek, ha p és q egész számok.

Komlós János (Gyakorló középiskola, VIII. o. Pécs.)

Jegyzet. Általában: ha az

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

egyenletnek, amelyben a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n együtthatók egész számok, míg x^n együtthatója 1, minden racionális gyöke egész szám. (L. Kürschák: Matematikai Versenytételek, 75. o.)

III. Megoldás. Ha a és b racionális számok, p és q egész számok úgy, hogy

$$a+b=p,\ldots \tag{1}$$

$$ab=q,\ldots \tag{2}$$

---

[1] a és b legn. közös osztója 1.

[2] $(r,s)\sim 1$; $\frac{r}{s}$ nem egyszerűsíthető, irreducibilis.

akkor $(a-b)^2 = p^2 - 4q$ szintén egész szám
és

(3) $$a - b = \pm\sqrt{p^2 - 4q} = \pm k \ldots$$

ahol a jobboldal racionális, egész szám.

1)-ből és 3)-ból

$$a = \frac{p \pm k}{2}, \qquad b = \frac{p \mp k}{2}.$$

Ha p páratlan szám, akkor $p^2 - 4q$ és így $\sqrt{p^2 - 4q} = k$ is páratlan. Ha p páros, akkor $p^2 - 4q$ és így $\sqrt{p^2 - 4q} = k$ is páros. Eszerint a és b egész számok.

Berger Tibor (Fáy András g. VIII. o. Bp. IX.)

1340. *Számítsuk ki logaritmustábla nélkül* $\sin 3^\circ$ *és* $\cos 3^\circ$ *értékét két tizedes pontossággal.*

I. Megoldás. Valamely mennyiséget két tizedes pontossággal adunk meg, ha a hiba a századrész felénél nem nagyobb.

a) Ismeretes, hogy $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right) = 1$, azaz a kicsiny szögek sinusának közelítő értéke a szög abszolut mérőszáma, még pedig úgy, hogy $\sin x < x$.[3]

Kimutatjuk, hogy

$$\sin x > x - \frac{x^2}{4}.$$

Ugyanis

$$\sin x = 2 \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right).$$

Azonban $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \frac{x^2}{2}$,[4]

és, mivel $\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, azért $1 - \sin^2\frac{x}{2} > \frac{x^2}{4}$,
tehát

$$\sin x > 2 \cdot \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right), \quad \text{azaz} \quad \sin x > x\frac{x^3}{4}.$$

Ez annyit jelent, hogy ha $\sin x$ közelítő értékéül x-et vesszük, a hiba kisebb, mint $\frac{x^3}{4}$.

$$\begin{array}{lll} 1^\circ & \text{abszolut} \quad \text{mérőszáma}: & \frac{\pi}{180} = 0{,}01745\ldots \\ 3^\circ & \quad ,, \qquad\qquad ,, & : 0{,}5236\ldots \end{array}$$

A hiba felső határa:

$$\frac{(0{,}05236\ldots)^3}{4} < \frac{0{,}06^2}{4} < 0{,}0001.$$

Eszerint $\sin 3^\circ$ közelítő értékéül 0,05236-ot tekintve, legfeljebb a tizezredrész nem pontos, de ezredrészig feltétlenül pontos; ha tehát két tizedes pontossággal óhajtjuk $\sin 3^\circ$-értékét, akkor ez: 0,05. A hiba, t. i. 0,002... a századrész felénél kisebb.[5]

b) Kicsiny szögek cosinusára érvényes:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

Ugyanis

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

azaz

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Ha pedig figyelemmel vagyunk arra, hogy

$$\sin\frac{x}{2} > \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^3,$$

[3] x a $\sin x$-et felülről közelíti meg; x a $\sin x$-nek fölösen közelítő értéke.

[4] $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

[5] Azonban $0{,}05 < \sin 3^\circ$.

akkor

$$1-2\sin^2\frac{x}{2}<1-2\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{32}\right)^2,$$

$$1-2\sin^2\frac{x}{2}<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}-\frac{x^6}{16\cdot 32}.$$

Ha a jobb oldalon az utolsó tagot elhagyjuk, még nagyobbat kapunk, azaz

$$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}.$$

Eszerint $1-\frac{x^2}{2}$ a $\cos x$-nek hiánnyal közelítő értéke; a hiba kisebb, mint $\frac{x^4}{16}$.

Azonban 3^0 esetében $\frac{x^4}{16}<\frac{(0{,}06)^4}{16}<10^{-6}$,
tehát

$$1-\frac{x^2}{2}=1-0{,}00137=0{,}99863$$

feltétlenül pontos 4 tizedesig, azaz

$$0{,}998<\cos 3^\circ<0{,}999.$$

Eszerint, ha két tizedesig pontos értéket óhajtunk, akkor követünk el a századrész felénél kisebb hibát, ha $\cos 3^\circ=1$.

NB. Pontosabb vizsgálatok kiderítették, hogy

$$\sin x>x-\frac{x^3}{6}$$

és

$$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24},$$

azaz az előbbi számításokban jelzett hibahatárok csökkenthetők, tehát

$$\begin{array}{lll}\sin x \text{ esetében} & 0<x-\sin x<\frac{x^3}{6} \text{ (az előbbi } \frac{x^3}{4} \text{ helyett)},\\ \cos x \quad \text{„} & 0<\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)<\frac{x^4}{24} \text{ (az előbbi } \frac{x^4}{16} \text{ helyett)}.\end{array}$$

Jegyzet. A dolgozatok általában nem ügyelnek a hiba megbecsülésére. Innen van az, hogy némely megoldásban ez található: $\sin 3^\circ<0{,}052$, ill. $\cos 3^\circ=0{,}99$.

Az itt közölt megoldásban követett gondolatmenet bármely elég kis szög sinusára, ill. cosinusára alkalmazható. Ha tekintettel vagyunk, hogy éppen 3°-ról van szó, számításunk egyszerűsíthető, a következő megoldás szerint.

II. Megoldás. Előbbi megoldásunk elején megállapítottuk, hogy

$$0{,}05<\sin 3^\circ=0{,}05236\ldots<0{,}053.$$

Eszerint $\sin 3^\circ$ közelítő értéke két tizedes pontosságig 0,05.

Minthogy

$$\cos 3^\circ=\sqrt{1-\sin^2 3^\circ}$$

$$\sqrt{1-0{,}053^2}<\cos 3^\circ<\sqrt{1-0{,}05^2}$$

$$\sqrt{1-0{,}053^2}=\sqrt{1-0{,}002809}=\sqrt{0{,}997191}=0{,}998\ldots$$

Eszerint

$$0{,}998<\cos 3^\circ<1$$

$\cos 3^\circ$ értéke két tizedes pontosságig 1.

Jegyzet. Ha figyelemmel vagyunk arra, hogy (mindig az első negyedben maradva)

$$\sin 2x<2\sin x,\quad \sin 3x<3\sin x,\quad \ldots\ \sin nx<n\sin x,$$

akkor

$$\sin 30^\circ<10\sin 3^\circ,\quad \text{vagyis } \sin 3^\circ>\frac{\sin 30^\circ}{10}=\frac{0{,}5}{10},$$

$$\sin 3^\circ>0{,}05.$$

III. Megoldás. $\sin 3^\circ$ kiszámítható a sinusfüggvény addició-tételének felhasználásával. Ugyanis

$$\sin 3^\circ = \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ.$$

A szabályos tízszög segítségével

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

15° függvényei a 30°-ú szög függvényeiből számíthatók ki.

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

[6]

Ezekkel az értékekkel

$$\sin 3^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} =$$
$$= \frac{1}{16}\left[\sqrt{30}-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{60+12\sqrt{5}}+\sqrt{20+4\sqrt{5}}\right].$$

Számítsuk ki ezen négyzetgyököket 4 tizedes pontossággal:

$$\begin{aligned}\sqrt{30} &= 5{,}4772+\varepsilon_1 \\ +\sqrt{10} &= 3{,}1623-\varepsilon_2 \\ +\sqrt{20+4\sqrt{5}} &= 5{,}3800-\varepsilon_3 \\ & \overline{14{,}0195}+\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\sqrt{6} &= 2{,}4491-\varepsilon_1' \\ +\sqrt{2} &= 1{,}4142+\varepsilon_2' \\ +\sqrt{60+12\sqrt{5}} &= 9{,}3184+\varepsilon_3' \\ & \overline{13{,}1817}-\varepsilon_1'+\varepsilon_2'+\varepsilon_3'.\end{aligned}$$

[7]

Itt mindegyik $0<\varepsilon<\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$, úgy, hogy a kivonásnál fellépő hiba abszolut értéke

$$|\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_1'-\varepsilon_2'-\varepsilon_3'| < \varepsilon_1+\varepsilon_1'+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_2'+\varepsilon_3' < 3\cdot 10^{-4} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}.$$

Ha most

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{16}(14{,}0195-13{,}1817) = \frac{0{,}8378}{16} = 0{,}0523\ldots,$$

akkor ezen érték ezredrészig feltétlenül pontos; tehát századrész pontossággal $\sin 3^\circ = 0{,}05$.

$\cos 3^\circ$ értéke most már úgy számítható ki, mint a II. megoldásban.

---

[6]A hiba könnyebb megbecsülése céljából alkalmazzuk a

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{x}+\sqrt{y} \text{ felbontást. Ugyanis, négyzetreemeléssel}$$

$$2+\sqrt{3} = x+y+2\sqrt{xy}, \text{ tehát } x+y=2 \text{ és } 2\sqrt{xy}=\sqrt{3}, \text{ ill. } xy=\frac{3}{4}.$$

x és y az $u^2-2u+\frac{3}{4}=0$ egyenlet gyökei: $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}$. Így

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \text{ és } \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$
$$\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pm 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}.$$

[7] $\sqrt{5} = 2{,}236068\ldots$