a) Egyik-másik megoldásban felmerült azon állítás, hogy az érintkező k_1 és k_2 körök köré írt gömb ω középpontja a két kör síkjának szögét felező síkban fekszik. Két sík szögét felező sík bármely pontja a két kör síkjától egyenlő távolságban van, azaz eszerint $O_1\omega = O_2\omega$ lenne, ami nyilván csakis azon esetben lehet igaz, ha az O_1 és O_2 körök sugarai egyenlők.

Az előbbi – téves – felfogás szerint ω oly gömb középpontja *is* lenne, mely a P (ABC) triéder lapjait (belülről) érinti. Általában azonban csakis azon gömb középpontja, mely a *triéder éleit az A, B, C pontokban érinti.*

Ugyanis, amint a megoldásban láttuk, az ω gömb keresztülmegy az A, B, C pontokon. Láttuk továbbá, hogy az AP egyenes merőleges Σ_3 síkra, tehát $AP \perp \omega A$; ez annyit jelent, hogy AP az ω gömböt az A pontban érinti. Hasonlóan $BP \perp \omega B$ és $CP \perp \omega C$: a P (ABC) triéder élei az ω gömböt az A, B, C pontban érintik.

Mivel pedig $\omega A = \omega B = \omega C$ és $PA = PB = PC$,[1] a $P\omega$ egyenes merőleges az ABC síkra és ezt az $ABC\triangle$ köré írt kör középpontjában döfi. Azt is mondhatjuk, hogy az ω gömb oly kúpfelületet érint az $ABC\triangle$ köré írt kör mentén, melynek tengelye P-ből az $ABC\triangle$ síkjára állított merőleges és a $P(ABC)$ triéder élei alkotói. Ha P a végtelenbe kerül, akkor a kúpból henger lesz, melyet az ω gömb az $ABC\triangle$ köré írt kör mentén érint: ezen kör az ω gömb legnagyobb köre lesz.

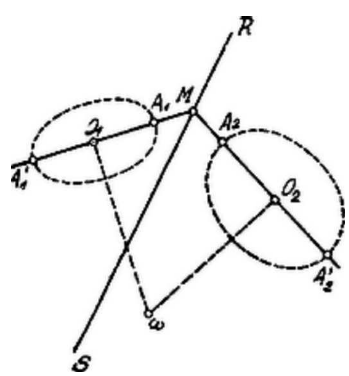
b) III. évfolyamunkban (119. o.) a 200. feladatban a következő kérdéssel foglalkoztunk: *mi a feltétele annak, hagy két kör a térben ugyanazon gömbön feküdjék.*[2]

Legyen a két kör (O_1) és (O_2); síkjuk metszésvonala RS. Ha (O_2)-t RS körül az (O_1) síkjában forgatjuk, kapjuk az (O_2') kört. Hogy (O_1) és (O_2) ugyanazon gömbön feküdjék, annak *szükséges és elégséges feltétele, hogy RS az (O_1) és (O_2') körök hatványvonala legyen.*

Ezen feltétel kielégítése ugyanis magában foglalja azon követelmény kielégítését, hogy ha a két kör síkjára az O_1 ill. O_2 középpontban merőlegeseket emelünk, ezek (egy síkban feküdve) valóban messék egymást, mégpedig egy olyan ω pontban, mely az (O_1) és (O_2) körök minden pontjától egyenlő távolságban van.

Ha az (O_1) és (O_2) körök valóban egy gömbön feküsznek, melynek középpontja ω, akkor $\omega O_1 \perp (O_1)$ és $\omega O_2 \perp (O_2)$, tehát az $O_1\omega O_2$ sík merőleges az (O_1) és (O_2) síkok mindegyikére és így e két sík RS metszővonala merőleges az $O_1\omega O_2$ síkra. Ha ezen síkot RS az M pontban metszi, $RS \perp MO_1$, és $RS \perp MO_2$. Forgassuk az O_2 síkját az O_1 síkjába: akkor ezen forgásnál MO_2 állandóan merőleges marad RS-re és így az $[O_1]$ síkban MO_1 egyenessel esik össze, azaz RS merőleges a két kör centrálisára, O_1O_2-re. Azonban M pontnak úgy az (O_1), mint az (O_2) körre vonatkozó hatványa megegyezik az M pontnak az ω gömbre vonatkozó halványával: kell, hogy RS az O_1 és O_2' körök hatványvonala legyen. Ezen feltétel tehát szükséges!

Megfordítva: ha az $[O_1]$ és $[O_2]$ metszővonala, RS, hatványvonala az (O_1) és (O_2') köröknek úgy, hogy e két kör centrálisa RS-t az M pontban metszi, akkor $O_1M \perp RS$ és $O_2M \perp RS$, tehát az O_1MO_2 sík is $\perp RS$. Az O_1MO_2 síkban állítsunk O_1-ben O_1M-re, O_2-ben O_2M-re merőlegest: ezen két merőleges metszőpontja legyen ω. Ekkor $\omega O_1 \perp [O_1]$, mert merőleges az $[O_1]$ sík két egyenesére, t. i. O_1M-re és RS-re. Hasonlóan $\omega O_2 \perp [O_2]$. Ebből következik: hogy ω az (O_1), ill. (O_2) minden pontjától egyenlő távolságban van. Most még csak azt kell kimutatnunk, hogy ω távolsága az (O_1) pontjaitól megegyezik az (O_2) pontjaitól való távolságával.



Feltettük azonban, hogy RS az (O_1) és (O_2') körök hatványvonala. Ha MO_1 az (O_1) kört az A_1 és A_1', MO_2 az (O_2) kört az A_2 és A_2' (diametrálisan szembenfekvő) pontokban metszi, akkor

$$\overline{MA_1} \cdot \overline{MA_1'} = \overline{MA_2} \cdot \overline{MA_2'},$$

azaz az A_1, A_1', A_2, A_2' pontok egy körön feküsznek, melynek középpontja nyilván ω, tehát

$$\omega A_1 = \omega A_1' = \omega A_2 = \omega A_2' = R,$$

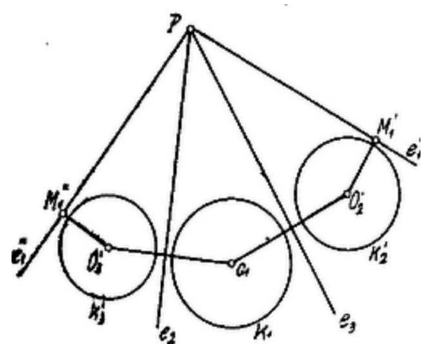
ahol R a gömb sugara, és az A pontokon átmenő kör a gömb egyik legnagyobb köre.

[1] $\omega AP\triangle \cong \omega BP\triangle \cong \omega CP\triangle$, mert $\omega A = \omega B = \omega C = R$, ωP közös és ωP-vel szemben fekvő szög derékszög.

[2] A körök síkjai nem párhuzamosak!

c) Már most felvethetjük a kérdést: mi a feltétele annak, hogy *három, különböző síkban fekvő kör egy gömbön feküdjék?* A három kör síkjai egy triéder lapjai. A triéder élei e_1, e_2, e_3. Ezeknek a *b)* alatti feltételt kell kielégíteniük, azaz e_1 hatványvonala legyen a k_2 és k_3'[3] (vagy k_3 és k_2') körök.

Ha e_1 hatványvonala a k_2 és k_3' köröknek, k_2 és k_3 egy gömbön feküsznek, melynek középpontja ω, az O_2-ben a k_2 síkjára és az O_3-ban a k_2 síkjára állított f_2 és f_3 merőlegesek metszőpontja. Azonban e_2 hatványvonala a k_3 és k_1' köröknek; k_3 és k_1 oly gömbön feküsznek, melynek középpontja közös pontja az O_1-ben a k_1 síkjára állított f_1 merőlegesnek és f_3-nak. Továbbá e_3 a k_1 és k_2' körök hatványvonala: k_1 és k_2 oly gömbön feküsznek, mely az f_1 és f_2 metszőpontja. Eszerint a nem egy síkban fekvő f_1, f_2 és f_3 egyenesek páronként metszik egymást, kell tehát, hogy f_1 az f_2 és f_3 egyenesek egy ponton menjenek keresztül és ezen pont ω, a szóbanforgó gömb középpontja.



(Forgassuk a k_2-t e_3 körül k_1 síkjába, k_2' helyzetébe, a k_3-t e_2 körül ugyancsak k_1 síkjába k_3' helyzetébe. Ekkor $e_3 \perp O_1O_2'$ és $e_2 \perp O_1O_3'$. Ezen forgatásoknál az e_1 az első esetben e_1', a második esetben e_1'' helyzetbe kerül. O_2'-ből az e_1'-re ill. az O_3'-ből az e_1''-re állított merőleges talppontja M_1' ill. M_1''; ezekre nézve $PM_1' = PM_1''$. Az e_1' pontjainak k_2' körre vonatkozó hatványa megegyezik az e_1'' megfelelő pontjainak a k_3' körre vonatkozó hatványával. A P pontnak mind a három körre vonatkozó hatványa egyenlő: a P pontból egyenlő hosszúságú érintődarabokat húzhatunk a három körhöz.)

A II. versenytételben megadott helyzet ezen általánosabb helyzetnek különös esete. Ha ugyanis a három kör páronként érintkezik, akkor két-két kör közös érintője – t. i. a két kör síkjának metszésvonala – a két körnek hatványvonala lesz, ha az egyik kör síkját ezen vonal körül – a másik kör síkjába forgatjuk.

[3] Ha k_3-t e_1 körül k_2 síkjába forgatjuk, keletkezik k_2',
Ha k_2-t e_1 „ k_3 „ „ „ k_2'.-nek s. í. t.