Ismeretes a binomiális együtthatók között a következő összefüggés:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n.$$

Ennek bizonyítását egyszerűen nyerhetjük, ha $(1+x)^n$ kifejtésében $x=1$-et teszünk. Ha pedig az

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n$$

egyenlet mindkét oldalát x szerint differeciáljuk és x helyébe 1-et helyettesítünk, akkor

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}$$

összefüggéshez jutunk.

Ennek a két összefüggésnek kombinatórikus értelmét óhajtjuk megvilágítani.

$\binom{n}{k}$ jelenti az n elemből alkotható k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációk számát; azaz megadja, hányféleképpen választhatunk ki az n elemből k elemet. Ezt a kiválasztást úgy valósíthatjuk meg, hogy felírjuk sorban az összes elemeket és azoknak, melyeket kiválasztunk, „1” szimbólumot, amelyeket pedig nem választunk ki, „0” szimbólumot adunk. Így pl. 5 elem összes másodosztályú kombinációit a következő módon jellemezhetjük:

1	2	3	4	5
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1

Ilyen módon 2 elemnek 5-öd osztályú ismétléses variációi keletkeztek, $\binom{5}{2}$ számban. Hasonlóképpen járhatunk el, ha az 5 elem összes 3-ad osztályú kombinációit akarjuk megvalósítani s í. t. Az 5 elem minden egyes kombinációjának megfelel 2 elemnek. – t. i. 1 és 0 – valamely 5-öd osztályú ismétléses variációja és viszont: az (1, 0) elemek bármely 5-öd osztályú ismétléses variációjához tartozik az 5 elemből alkotható valamelyik ismétlés nélküli kombináció, azaz a

$$\sum_{i=0}^{5}C_5^i=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$$

számú kombinációk és 2^5 számú ismétléses variációk között egyértelmű vonatkozás áll fenn.

[Az $\binom{5}{0}$ számú kombinációnak megfelel a

$$0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0$$

variáció].

Már most általában: az $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}$ összeg jelenti az n elemből alkotható összes kombinációk számát. Ez a szám tehát annyi lesz, ahányféle módon az 1-eseket és 0-kat elhelyezhetjük az n helyen. Ez azonban az (1, 0) elemeknek n-ed osztályú ismétléses variációit jelenti, tehát számuk: 2^n.

Képzeljük most már felírva az ilyen formában előállított kombinációkat és adjuk össze a sémában szereplő számokat. Ekkor $\binom{n}{1}$ csoportban egy 1-es szerepel, a többi szám 0, ezeknek összege tehát: $\binom{n}{1}1$; $\binom{n}{2}$ csoport mindegyikében két 1-es szerepel, ezeknek összege: $\binom{n}{2}2$; $\binom{n}{k}$ csoportban k darab 1-es, ezeknek összege $\binom{n}{k}k$ s. í. t. Ha tehát mindegyiket összeadjuk, akkor eredményül

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+k\binom{n}{k}+\ldots+n\binom{n}{n}$$

összeget nyerjük.

Másrészt világos, hogy ha az összes csoportokat felírjuk, azokban ugyanannyi 0 szerepel összesen, mint 1-es, hiszen két elem összes n-ed osztályú ismétléses variációiban mindegyik elem egyformán szerepel. A sémában a sorok száma összesen 2^n, mindegyikben n szám szerepel, tehát az összesen szereplő számok száma $n \cdot 2^n$. Ezeknek a fele lesz 1-es, értékük tehát:

$$\frac{n \cdot 2^n}{2} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Így $$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Budapest, 1937.

Svédné Wachsberger Márta
leánygimnáziumi tanárnő