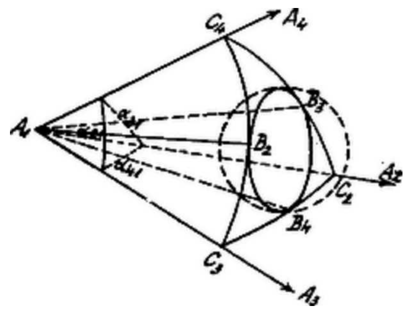
Előző közleményünkben (l. ezen évf. 2. számában) a tetraédernek a köréírt gömbbel kapcsolatos tulajdonságait tárgyaltuk; a következőkben a tetraédernek éleit, illetve lapjait érintő gömbre vonatkozó néhány jellegzetes tételt fogunk ismertetni.

Először a lapokat érintő, azaz beírt [1] gömbbel foglalkozunk. A tetraéder belső lapszögeit felező hat síknak mindig van közös pontja és ezen közös pont mindegyik tetraéderlaptól egyenlő távolságra van, tehát beírt gömb mindig létezik.

A beírt gömb egyik jellemző tulajdonsága a következő: *Kössük össze a tetraéder egyik háromszöglapjának csúcsait a beírt gömbnek rajtalevő érintési pontjával; az összekötő egyenesek (transzverzálisok)* [2] *által alkotott szögek legyenek* σ', σ'', σ'''. *Akkor a többi lapokon is, az érintési pont körül hasonló módon ugyanakkora* σ', σ'', σ''' *szögek keletkeznek. (Bang tétele.) A* σ', σ'', σ''' *szögek egyenlők a tetraéder-élekből alakakítható torznégyszögek fél szögösszegével.*



Jelöljük az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéderbe írt gömb érintéspontjait B_1, B_2, B_3, B_4-gyel, továbbá az i-dik lapban a k-ik csúcsnál fekvő élszöget α_{ik}-val (általában $\alpha_{ik} \neq \alpha_{ik}$) és tekintsük először a tetraéder egyik, például A_1 csúcsnál lévő triéderét. Az A_1 csúcsból az $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$ élek és az $\overline{A_1B_2}$, $\overline{A_1B_3}$, $\overline{A_1B_4}$ transzverzálisok indulnak ki. Szerkesszünk A_1 köré gömböt, mely a tőle egyelő távolságra lévő [3] B_2, B_3, B_4 érintéspontokon átmegy. Ez a gömb a triédert egy gömbháromszögben, a tetraéderbe írt gömböt pedig körben metszi, mely kör nyilván az előbbi gömbháromszög oldalait érinti, tehát

$$\text{egyrészt}\quad \begin{aligned} \widehat{B_3A_1A_2} &= \widehat{B_4A_1A_2}^{4} \\ \widehat{B_4A_1A_3} &= \widehat{B_2A_1A_3} \\ \widehat{B_2A_1A_4} &= \widehat{B_3A_1A_4} \end{aligned} \quad \text{másrészt} \quad \begin{aligned} \widehat{B_2A_1A_3} + \widehat{B_2A_1A_4} &= \alpha_{21} \\ \widehat{B_3A_1A_4} + \widehat{B_3A_1A_2} &= \alpha_{31} \\ \widehat{B_4A_1A_2} + \widehat{B_4A_1A_3} &= \alpha_{41} \end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned} \widehat{B_3A_1A_2} = \widehat{B_4A_1A_2} &= \frac{\widehat{A_2A_1A_3} + \widehat{A_2A_1A_4} - \widehat{A_3A_1A_4}}{2} = \frac{\alpha_{31}+\alpha_{41}-\alpha_{21}}{2} \\ \widehat{B_4A_1A_3} = \widehat{B_2A_1A_3} &= \frac{\widehat{A_3A_1A_4} + \widehat{A_3A_1A_2} - \widehat{A_4A_1A_2}}{2} = \frac{\alpha_{41}+\alpha_{21}-\alpha_{31}}{2} \\ \widehat{B_2A_1A_4} = \widehat{B_3A_1A_4} &= \frac{\widehat{A_4A_1A_2} + \widehat{A_4A_1A_3} - \widehat{A_2A_1A_3}}{2} = \frac{\alpha_{21}+\alpha_{31}-\alpha_{41}}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ugyanilyen összefüggések állapíthatók meg a többi csúcsok körüli élszögekre, ill. ezek részeire is.

Ezen összefüggések alapján közvetlenül kitejezhetjük a B_i érintéspontokból húzott transzverzálisok által bezárt szögeket a tetraéder élszögei segélyével:

$$\widehat{A_1B_4A_2} = \widehat{A_1B_3A_2} = 180^\circ - \left(\widehat{B_3A_1A_2} + \widehat{B_3A_2A_1}\right) =$$
$$= 180^\circ - \frac{\alpha_{31}+\alpha_{32}+\alpha_{41}+\alpha_{42}-\alpha_{21}-\alpha_{12}}{2} = \frac{\alpha_{34}+\alpha_{43}+\alpha_{21}+\alpha_{12}}{2}$$

[1] Tehát azzal a gömbbel, mely a tetraéderlapokat egy-egy belső pontban érinti. Tudvalevőleg hét olyan érintő gömb létezik, mely egyes tetraéderlapok meghosszabbításait érinti.

[2] „Transzverzális" rendesen a háromszög csúcsát a szembenfekvő oldal valamely pontjával összekötő távolságot jelenti. Itt ezen kifejezést tágabb értelemben, a rövidebb fogalmazás kedvéért használjuk az egyes tetraédercsúcsokat a szomszédos érintési pontokkal összekötő távolságokra is.

[3] Ha a gömbhöz egy kívülfekvő pontból tetszőleges számú érintőt húzunk, az érintéspontok az érintők közös pontjától egyenlő távolságra vannak.

[4] A $B_2B_3B_4$ gömbi kör a $C_2C_3C_4$ gömbháromszögbe írt érintő kör. A C_i csúcs egyenlő gömbi távolságban van a B_k, B_l érintési pontoktól. Tehát pl. $\widehat{C_3B_4} = \widehat{C_3B_2}$ és így, $\widehat{B_4A_1A_3}$ és $\widehat{B_2A_1A_3}$ mint kongruens körívekhez tartozó középponti szögek egyenlők.

Egyszersmind utalunk arra, hogy az (1) alatti formulák ugyanolyan szerkezetűek, mint amelyek a síkháromszögbe írt kör érintési pontjának a szomszédos csúcsoktól való távolságát fejezik ki.

eszerint

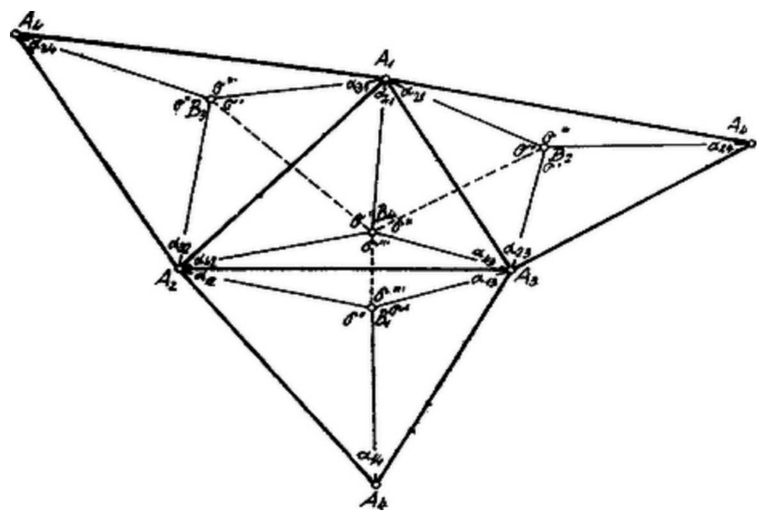
$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\widehat{A_3B_2A_4} &= \widehat{A_3B_1A_4} = \widehat{A_1B_4A_2} = \widehat{A_1B_3A_2} = \frac{\alpha_{34}+\alpha_{43}+\alpha_{12}+\alpha_{21}}{2} = \sigma' \\
\widehat{A_2B_3A_4} &= \widehat{A_2B_1A_4} = \widehat{A_1B_2A_3} = \widehat{A_1B_4A_3} = \frac{\alpha_{24}+\alpha_{42}+\alpha_{13}+\alpha_{31}}{2} = \sigma'' \\
\widehat{A_1B_2A_4} &= \widehat{A_1B_3A_4} = \widehat{A_2B_1A_3} = \widehat{A_2B_4A_3} = \frac{\alpha_{14}+\alpha_{41}+\alpha_{23}+\alpha_{32}}{2} = \sigma'''
\end{aligned}
$$

azaz: *a tetraéder $\overline{A_iA_k}$ és $\overline{A_lA_m}$ szemközti élei a (szomszédos) érintéspontokból*

$$\frac{\alpha_{ik}+\alpha_{ki}+\alpha_{lm}+\alpha_{ml}}{2}$$

szög alatt látszanak. Az így nyert eredménynek nyilvánvaló következménye a említett Bang-féle tétel: A tetraéderlapokon levő B_i érintéspontokból a csúcsokhoz húzott transzverzálisok mind a négy lapon ugyanazon σ', σ'', σ''' szögeket alkotják.

A σ', σ'', σ''' szögek (2) alapján a következőképpen is jellemezhetők:



Ha a tetraéder éleiből minden lehető módon elhagyunk egy-egy szemközti élpárt, úgy három torznégyszöget nyerünk. A σ', σ'', σ''' szögek ezen torznégyszögek fél szögösszegeivel egyenlők. A fenti eredményt ezek szerint a háromszöggeometriából ismeretes szög-koordináták felhasználásával még a következőként fogalmazhatjuk: [5]

A beírt gömb érintéspontjainak a szögkoordinátái mind a négy tetraéderlapon ugyanazok, éspedig egyenlők a tetraéderélekből alkotható három torznégyszög fél szögösszegével.

*Izogónikus*nak nevezzük az olyan tetraédert, melynek összes élei a beírt gömb (szomszédos) érintéspontjaiból a 120° alatt látszanak. A fentiek szerint egy tetraéder nyilván akkor és csak akkor izogónikus, ha az élekből alkotható három torznégyszög mindegyikének szögösszege 240°. [6]

Ha egy triéder élszögeit felezzük és a felező egyeneseken át a megfelelő triéderlapokra merőleges síkokat állítunk, akkor ez a három felező merőleges sík egymást egy egyenesben metszi. [7] Az így nyert egyenes a triéder köré írt körkúp tengelye, vagyis azon pontok mértani helye, melyek a három triederéltől egyenlő távolságra vannak.

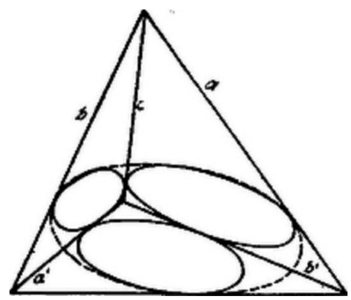
Ha egy tetraéder mindegyik triéderéhez megszerkesztjük a körülírt körkúpot, a négy kúp tengelyei általában nem találkoznak egy pontban, tehát általában nincs olyan pont, mely egy tetraéder összes éleitől egyenlő távolságra van, nincs tehát olyan gömb sem, mely a tetraéder összes éleit érinti. Ilyen „élérintő” gömb létezésekor a tetraéder alkatrészei közt bizonyos feltételek állnak fenn, melyek mint látni fogjuk, teljesen analógok a kör köré írt négyszög alkatrészei közt fennálló feltételekhez.

---

[5] A háromszög geometriában a sík valamely pontjának a háromszöghöz viszonyított szögkoordinátái: a pontot a háromszög csúcsaival összekötő transzverzálisok által alkotott szögek. A háromszög belső pontjaira nézve ezen szögkoordináták összege nyilván 360°.

[6] Az n oldalú torzsokszög szögeinek összege kisebb, mint az n oldalú konvex síksokszög szögeinek összege! (L. III. évf. 85. o. 187. feladatban.)

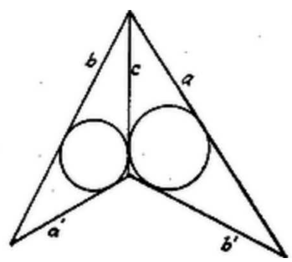
[7] A bizonyítás azon alapul, hogy ha egy szög felezőjén át a szög síkjára merőleges síkot fektetünk, akkor ezen sík bármely pontja a szög vagy csúcsszögének száraitól egyenlő távolságban van.



Ha ugyanis a tetraéder a, b, c, a', b', c' élei (l. ábra) egy gömböt érintenek, úgy nyilván azon három torznégyszög oldalai közt, melyek két-két szemközti él elhagyásával keletkeznek, ugyanazon feltételeknek kell fennállaniok, mint egy kör köré írt négyszög oldalai közt, azaz

$$a+a'=b+b'=c+c' \tag{3}$$

Ki fogjuk mutatni, hogy ezen szükséges feltételek egyúttal elegendők is, azaz: *Egy tetraédernek akkor és csak akkor van (belső) élérintő gömbje, ha a szembenlevő élek hosszúságösszegei egyenlők.*



Szerkesszünk mindegyik tetraéderlapba érintő kört. Az $(ab'c)$, illetve $(a'bc)$ lapba írt kör érintéspontjainak az (abc) csúcstól való távolsága

$$\frac{a+c-b'}{2},\quad \text{ill.}\quad \frac{b+c-a'}{2},$$

ezen távolságok azonban a (3) relációk alapján egyenlők, tehát az $(a'b'c)$ és $(a'bc)$ lapokba írt körök érintik egymást. Miután az előbbi meggondolás mindegyik lappárra érvényes, tehát következik, hogy a tetraéderlapokba írt körök a (3) feltételek fennállása esetén egymást páronként érintik és pedig úgy, hogy az összes érintéspontok különbözők. Ekkor pedig a négy tetraéderlapba írt kör (l. ezen évf. 5. számában az 1364. feladatot) egy gömbön fekszik és az így meghatározott gömb a tetraéder élérintő gömbje. Az így nyert eredményt még a következőképpen fogalmazhatjuk: *A belső élérintőgömb létezésének szükséges és elegendő feltétele az, hogy a tetraéderlapokba írt körök egymást páronként érintsék.*

Hasonlóképen kimutatható, hogy egy tetraédernek akkor és csak akkor van külső élérintő gömbje (azaz olyan, mely egyes éleknek a meghosszabbításait érinti) ha a tetraéder élek közt a

$$a-a'=b-b'=c-c'$$

feltételek állnak fenn.

Egerváry Jenő