Folyóiratunk XIII. évfolyamának 8. számában a „Sokszögekre vonatkozó szélsőérték feladatokról” című közlemény bizonyos – zárt konvex görbékkel kapcsolatos – szélsőérték tulajdonságú sokszögekkel foglalkozik.

Bebizonyítja, hogy:

1. A zárt konvex görbébe írható maximális területű n-szögre fennáll, hogy a görbéhez bármelyik csúcspontjában húzott érintő párhuzamos a két szomszédos csúcsponton átfektetett szelővel.

2. A zárt konvex görbe körül írható minimális területű n-szög bármely oldalát az érintési pont felezi.

3. A zárt konvex görbét területileg legjobban megközelítő n-szög minden oldalát saját felezőpontja és a görbével való két metszéspontja négy egyenlő részre osztja.

Ezen háromféle extrém sokszöget azonban a fenti egy-egy tulajdonságuk nem határozza meg, azaz a fenti feltételek tetszésszerinti zárt konvex görbe esetén szükségesek, de nem elégségesek. Azonban kör esetében elégségesek is.

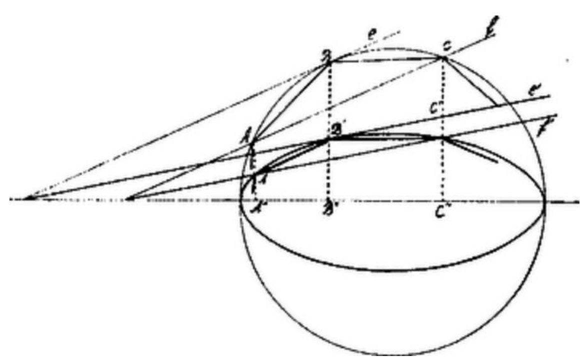
A következőkben bebizonyítjuk, hogy ezen szükséges feltételek ellipszis esetén is elégségesek.

A) Meghatározandó az ellipszisbe írható legnagyobb területű n-szög.

Először megrajzoljuk a főkört és megszerkesztjük a főkörbe írható szabályos n-szöget. Ezen n-szög affin megfelelője lesz az ellipszisbe írható legnagyobb területű n szög. (Az affinitásról részletesen I. XI. évfolyamunk 241. o.) Ilyen n szög azonban végtelen sok van. Ugyanis a körbe írt szabályos n-szög elforgatható és minden helyzetében megszerkeszthetjük az affin megfelelőjét.

a) Ezen n-szögek és csakis ezek mindegyike tesz eleget az 1. szükséges feltételnek. Ugyanis a körbe írt szabályos sokszög egyik csúcsában húzott érintő, az e egyenes párhuzamos a szomszédos csúcsokat összekötő f egyenessel (1. ábra); tehát e' és f', az affin megfelelőjük is párhozamosak.

b) Ezen n-szögek területe egyenlő és nagyobb területű n-szög nem írható az ellipszisbe.



1. ábra

Bontsunk ugyanis fel egy ilyen n-szöget trapézekre az 1. ábrán látható módon.(A körbe írható szabályos n-szög csúcspontjaiból bocsássunk merőlegest a nagy tengelyre). Akkor bármely két megfelelő trapéz területének viszonya, pl.:

$$\frac{AA''BB''}{A'A''B'B''}=\frac{\dfrac{A''B''}{2}(AA''+BB'')}{\dfrac{A''B''}{2}(A'A''+B'B'')}=\frac{a}{b},$$

ahol a az ellipszis fél nagy tengelyét, b a fél kis tengelyét jelenti.

Ezért a trapézek összegére, azaz az $(ABC\ldots)$ és $(A'B'C'\ldots)$ n-szögre is fennáll, hogy:

$$\frac{T_n^k}{T_n^e}=\frac{a}{b},$$

ahol T_n^k a körbe írt n-szög, T_n^e pedig ez ellipszisbe írható megfelelő n-szög területét jelenti. Mivel $\dfrac{a}{b}$ és T_n^k állandók, tehát:

I. $$T_n^e=T_n^k\frac{a}{b}\ldots$$

szintén állandó.

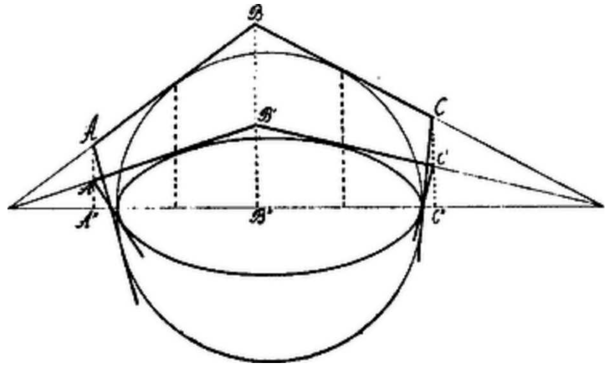
Nagyobb területű n-szög nem írható az ellipszisbe, mert különben az I. alapján a körbe is lehetne a szabályos n-szögnél nagyobb területű n szöget írni, már pedig a körbe írható n-szögek közül a szabályos n-szög területe a legnagyobb.

Az 1. szükséges feltétel ellipszis esetén tehát elégséges is.

B) Meghatározandó az ellipszis köré írható legkisebb területű n-szög.

Az ellipszis köré írható legkisebb területű n szög a főkör köré írt szabályos n-szög affin megfelelője.

a) Csakis ezekre nézve áll fenn, hogy az érintési pont az oldalakat felezi. Ugyanis kör esetén ilyen tulajdonsággal csak a köré írható szabályos n-szög rendelkezik. Tehát csak ennek affin megfelelője rendelkezik szintén ilyen tulajdonsággal. (L. a 2. ábrán).



2. ábra

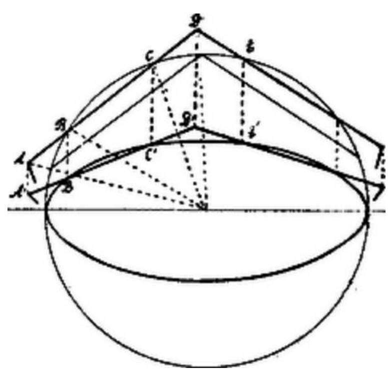
b) Ilyen n-szög, a kör köré írható szabályos n szög helyzete szerint, az ellipszisnél is végtelen sok van. Ezek területe azonban egyenlő és ezeknél kisebb területű n-szög nem írható az ellipszis köré. Ugyanis az előbbi esetben analóg módon látható, hogy:

II. $$T_n^{e'} = T_n^{k'}\frac{b}{a}\ldots$$

ahol $T_n^{e'}$ és $T_n^{k'}$ most az ellipszis, illetve a kör köré írható n-szögek területét jelenti. Mivel a jobboldal állandó, a baloldal is az. Ha az ellipszis köré lehetne ezeknél kisebb területű n-szöget is írni, akkor a kör köré is lehetne. Kör esetén azonban a 2. tulajdonságuk csak a köré írható szabályos n szögeknek van meg. Ezekből következik, hogy a 2. feltétel ellipszis esetén is elégséges.

C) Az ellipszist területileg legjobban approximáló n-szög.

Most is először a főkört területileg legjobban approximáló n-szöget szerkesztjük meg. Ez úgy történik, hogy előbb megszerkesztjük a körbe írható szabályos n-szöget és ennek minden oldalát négy egyenlő részre osztjuk. Azután a két szélső osztó pontot projiciáljuk a kör középpontjából a körre. (3. ábra.) Az így nyert pontokat összekötjük. A keletkezett n-szög lesz a keresett extrém tulajdonságú n-szög körre nézve.[1]



3. ábra

Ennek affin megfelelője lesz az ellipszist területileg legjobban approximáló sokszög.

Ilyen n szög szintén végtelen sok van, azonban:

a) Ezek mindegyike eleget tesz a 3. feltételnek.

b) Az ellipszist területileg egyenlően approximálják. Ugyanis a kör és az $(ABC\ldots)$ sokszög oldalai által határolt terület úgy aránylik az ellipszis kerülete és a megfelelő sokszög által határolt területhez, mint $a : b$.

Tehát ha az ellipszisnek lenne ezen n-szögeknél területileg jobban approximáló n-szöge, akkor a körnek is lenne a fenti módon szerkesztett n-szögnél jobban approximáló n-szöge, ez azonban feltevésünkkel ellenkezik. Tehát a 3. feltétel ellipszis esetén is elégséges.

Budapest

Adler Ernő
gyakorlóiskolai tanárjelölt

[1] Olyan n-szög, amely a körre nézve a 3) feltételt kielégíti, csak egy van és ez a leírt módon szerkesztett n-szög. Szerkesszünk ugyanis egy olyan oldalt, amely a 3. feltételnek megfelel; legyen ez pl. AD (3. ábra). A D végpontból húzzunk szelőket; ezek között a DA-n kívül még csak egynek lesz meg az a tulajdonsága, ami DA-nak megvan (t. i. a DE-nek) és ezen szelő szeleteinek hossza megegyezik a DA szeleteivel. Hogy az így keletkező szabályos n-szög területileg valóban legjobban közelíti meg a körét, annak bizonyításával itt nem foglalkozunk.