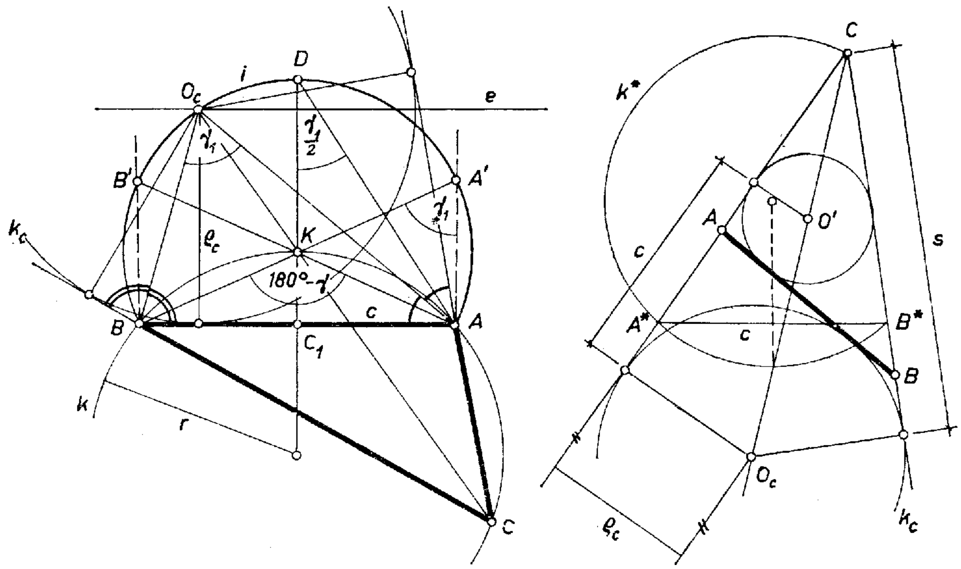
I. megoldás. Használjuk a háromszögben szokásos jelöléseket, legyen továbbá a k körülírt kör sugara r, az adott $AB=c$ oldalhoz hozzáírt k_c kör sugara ϱ_c. E kör O_c középpontja AB-től ϱ_c, távolságra van, és az ABO_c háromszögből

$$AO_cB\sphericalangle = 180^\circ - O_cAB\sphericalangle - O_cBA\sphericalangle = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha +$$
$$+180^\circ - \beta) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180^\circ-\gamma}{2} = \gamma_1,$$

mert AO_c, BO_c, felezi az A-nál, ill. B-nél levő külső szöget.



Ezekből a következő szerkesztés adódik. k-ba tetszés szerint beillesztjük a c húrt, AB egyik oldalán vele párhuzamosan ϱ_c távolságban e egyenest húzunk, továbbá ugyanezen oldalán megszerkesztjük az AB szakasz γ_1 nyílású i látószögkörívét, ahol γ_1 fele akkora, mint az AB szakasz látószöge k-nak arról az ívéről, amely AB-nek ugyanazon partján van, mint e. Az e és i közös O_c pontja körül megrajzoljuk k_c-t, és az ehhez A-ból és B-ből húzott második érintők közös pontja C.

Csak azt kell bizonyítanunk, hogy ez a két érintő k-n metszi egymást. Valóban, az AC, BC érintő az AB egyenes képe AO_c-re, ill. BO_c-re, így

$$ACB\sphericalangle = 180^\circ - CAB\sphericalangle - CBA\sphericalangle = 180^\circ - (180^\circ - 2\cdot O_cAB\sphericalangle) -$$
$$-(180^\circ - 2\cdot O_cBA\sphericalangle) = 2(O_cAB\sphericalangle + O_cBA\sphericalangle) - 180^\circ =$$
$$= 2(180^\circ - \gamma_1) - 180^\circ = \gamma,$$

és AB-nek γ nyílásszögű látóköríve éppen a k-nak az az íve, amely az AB egyenesnek O_c-t nem tartalmazó partján van.

A megoldhatóság feltételei: c beilleszthető legyen k-ba: $c \le 2r$, továbbá O_c létrejöjjön – vagyis i magassága ne legyen kisebb ϱ_c-nél, – éspedig i-nek azon az $A'B'$ rész-ívén, amely az AB-re A-ban és B-ben emelt merőlegesek között van, hiszen k_c érintési pontjának A és B között kell lennie. Az utóbbi feltétel így írható

$$(C_1D=) \qquad \frac{c}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma_1}{2} \ge \varrho_c > c\operatorname{cotg}\gamma_1 = c\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \qquad (=AA').$$

Az utóbbi feltétel szélső oldalainak c-vel és r-rel való kifejezése bonyolult, mert γ-ra $\sin\gamma = c/2r$-ből két egymást 180°-ra kiegészítő megoldást kapunk, a megfelelő γ_1-ek pedig pótszögek.

e-t és i-t $c<2r$ esetén az AB egyenes két oldalán szerkeszthetjük, így a megoldások száma legfeljebb 2; ugyanis e-nek és i-nek AB ugyanazon oldalán adódó 2 metszéspontja nem ad lényegesen különböző megoldásokat, hiszen egymás tükörképei AB felező merőlegesére.

Az i ív K középpontja k ugyanazon parton levő AB ívének felezőpontja, mert $AKB\sphericalangle = 2\gamma_1 = 180^\circ - \gamma$; ez megkönnyíti i szerkesztését. Könnyű belátni, hogy C-t az O_cK egyenessel is kimetszhetjük k-ból.

Bajna Zsolt (Esztergom, Bottyán J. műszerip. techn. IV. o. t.)

II. megoldás. Láttuk az I. megoldásban, hogy c és r meghatározzák γ-t, ennélfogva a háromszög s fél-kerületét is, hiszen k_c az ACB szög szárait C-től s távolságban érinti. Így pedig ismertté válik a beírt k' kör érintési pontjának (ugyancsak CA-n és CB-n) C-től való távolsága is, ez ugyanis $s-c$.

Ennek alapján a szerkesztés: egy r sugarú k^* körbe beillesztjük az $A^*B^*=c$ húrt, végpontjain át a kör egy további C pontjából félegyeneseket húzva, ezek szöge γ (egyik értéke). Megszerkesztjük az A^*CB^* szög szárait érintő, ϱ_c sugarú

k_c kört, érintési pontjaiból C felé fölmérjük c-t, a végpontokban a szárakat érintő kör lesz k', végül vesszük k_c és k' egyik közös érintőjét, messe ez γ szárait A-ban, ill. B-ben, ekkor ABC egy megfelelő háromszög.

A szerkesztés helyességének bizonyítását, valamint a diszkussziót – hely hiányában – az olvasóra hagyjuk.

A *kitűző* megoldása

Megjegyzés. s és $2s$ ismeretében $a+b$ is ismert, így visszajutunk a háromszögnek a γ, c, $a+b$ adatokból való megszerkesztésére, ami ismert feladat.

Kiss Árpád (Budapest, Bláthy O. techn. IV. o. t.)