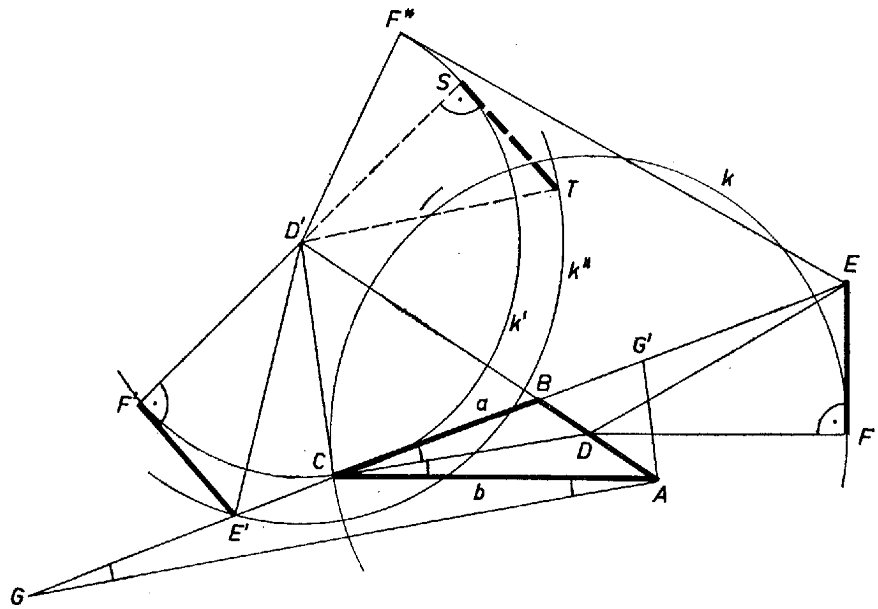
I. Legyen a D körüli DC sugarú k körhöz E-ből húzott egyik érintő érintési pontja F. Fejezzük ki a kérdéses AB és EF, valamint a szóba jövő további szakaszokat az adott háromszög $CA = b$, $CB = a$ oldalaival és $ACB\sphericalangle = \gamma$ szögével.



A DE átfogójú DEF derékszögű háromszögből, majd a koszinusz-tételt alkalmazva a CDE háromszög DE oldalára

(1) $$EF^2 = DE^2 - DF^2 = DE^2 - DC^2 = CE^2 - 2CD \cdot CE \cos DCE\sphericalangle.$$

Húzzunk párhuzamost CD-vel A-n át a BC egyenessel való G metszéspontjáig (ami az oldal C-n túli meghosszabbításán adódik, mert A a BD szakasz D-n túli meghosszabbításán van). Ekkor CAG egyenlő szárú háromszög, $CG = CA = b$, mert

$$CGA\sphericalangle = BCD\sphericalangle = \gamma/2 = DCA\sphericalangle = CAG\sphericalangle.$$

Így egyrészt

$$CE = CB + BE = CB + CA = CB + CG = BG = a + b,$$

másrészt $AG = 2b \cos \gamma/2$. Továbbá a BDC és BAG háromszögek hasonlók, ezért

(2) $$DC : AG = BC : BG = BC : CE, \quad \text{és így} \quad CD \cdot CE = BC \cdot AG.$$

Ezeket (1)-be beírva, a $2\cos 2x - 1 = \cos 2x$ azonosság fölhasználásával

$$EF^2 = (a+b)^2 - 2BC \cdot AG \cos \gamma/2 = (a+b)^2 - 4ab \cos^2 \gamma/2 =$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab(2\cos^2 \gamma/2 - 1) = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = AB^2,$$

amiből $EF = AB$, amint a feladat állítja.

II. Messe az AB egyenest az ACG külső szög felezője D'-ben (kizárva természetesen a $CA = CB$ esetet, amikor a felező párhuzamos AB-vel), és próbáljuk keresni az állításnak CD'-re vonatkozó megfelelőjét a következők szerint. Írjunk k' kört D' köré $D'C$ sugárral, szerkesszünk egy tetszés szerinti S pontjában érintőt, és mérjük rá az $ST = AB$ szakaszt. Ekkor mindazok a pontok, amelyekből a k'-höz húzható érintők hossza AB-vel egyenlő, a D' körül $D'T$ sugárral írt k'' körön vannak. Tekintsük k'' és a BC egyenes metszéspontjainak B-től mért távolságát. Az ábra szerint az E' metszéspontra a $BE' = BE = CA$ sejtés adódik. Erre alapítjuk a következő állítást: „a B-ből C felé fölmért $BE' = AC$ szakasz E' végpontjából a k'-höz húzott $E'F'$ érintő hossza AB.” A bizonyítást az olvasó a fentiek csekély módosításával könnyen elvégezheti.

Könnyű belátni azt is, hogy az A, B betűk szerepe mindkét állításban felcserélhető.

Szeredi Péter (Budapest, II. Rákóczi F. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Egy bizonyos feltétel teljesülése esetén a D' körüli, $D'C$ sugarú körhöz az eredeti E pontból húzható érintő hossza is egyenlő AB-vel. Legyen $AG' \parallel CD'$, így $CD' \perp CD$ miatt $CG' = CA$, $BG' = b - a$ (mert az ábrán $b > a$), $AG' = 2b \sin \gamma/2$. A $BD'C$ és BAG' háromszögek hasonlók, emiatt

(3) $$D'C = \frac{AG' \cdot BC}{BG'} = \frac{2ab \sin \gamma/2}{b-a},$$

és a fentiekhez hasonlóan, $ECD'\sphericalangle = 90^\circ - \gamma/2$, valamint a $2\sin^2 x - 1 = -\cos 2x$ azonosság felhasználásával

$$EF^{*2} = D'E^2 - D'F^{*2} = D'E^2 - D'C^2 = CE^2 - 2CE\cdot CD'\sin\gamma/2 =$$
$$= (a+b)^2 - \frac{a+b}{b-a}\cdot 4ab\sin^2\gamma/2 = a^2+b^2-2ab\left[\frac{a+b}{b-a}(1-\cos\gamma)-1\right].$$

Ez akkor egyenlő AB^2-nek a koszinusz-tételből adódó kifejezésével, ha

$$\frac{a+b}{b-a}(1-\cos\gamma)-1=\cos\gamma,\ \text{másképpen ha}$$

$$\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}=\frac{1-a/b}{1+a/b}.$$

Ekkor $\cos\gamma = a/b$, $c^2 = b^2 - a^2$, vagyis a feltétel az, hogy a háromszögben B-nél derékszög legyen.

Balogh József (Hatvan, Bajza J. g. III. o. t.)

2. A belső szögfelezőszakasz hosszára is adható a (3)-hoz hasonló, gyakran használható kifejezés. (2)-ből ugyanis

$$CD = \frac{BC\cdot AG}{CE} = \frac{2ab\cos\gamma/2}{a+b}.$$

E két képlet összehasonlítása is rávezethet arra az ötletre, hogy a tételnek a külső szögfelezőre való kiterjesztésében a $CE = a+b$ szakasz helyett $a-b$-vel próbálkozzunk.