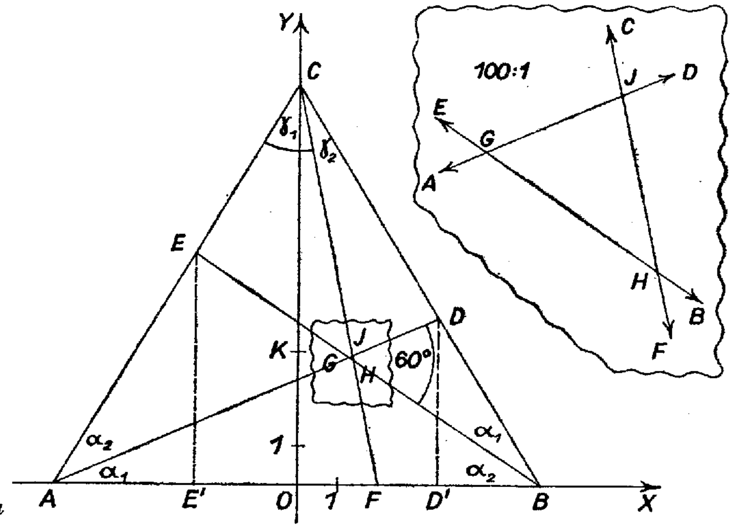
I. megoldás. A szerkesztés szerint a $GHJ = T'$ háromszög nagyon kicsi az $ABC = T$ háromszöghöz képest (a segédábra a GHJ háromszöget lineárisan 100-szoros nagyításban mutatja).



1. ábra

1. ábra

$BD = CE$ és a T háromszög szabályos volta miatt az ABD és BCE háromszögek azonos körüljárásúan egybevágók, és T-nek K középpontja körüli $120°$-os forgatásával egymással fedésbe hozhatók. Ezért BE az AD-nek elforgatottja, $DGE\sphericalangle = AGB\sphericalangle = 120°$, és mivel C és F ezekben a szögtartományokban vannak, H és J vagy a BGD vagy az AGE szög szárain vannak, ezért mindenesetre $HGJ\sphericalangle = 60° = ABC\sphericalangle$. Így a keresett arány, a területeket ugyanúgy jelölve, mint magukat a háromszögeket:

$$T' : T = \frac{GH \cdot GJ \sin 60°}{2} : \frac{AB \cdot AC \sin 60°}{2} = GH \cdot GJ : 144,$$

és GH-t megadja a BG és BH, GJ-t pedig az AJ és AG szakaszok különbségének abszolút értéke.

E szakaszok az ABG, BCH, ill. CAJ háromszögben oldalak, kifejezhetők T oldalával és a csúcsoknál keletkezett (az 1. ábra szerint jelölendő) szögekkel a színusz-tétel alapján:

$$BG = \frac{AB \sin\alpha_1}{\sin AGB\sphericalangle} = \frac{24\sin\alpha_1}{\sqrt{3}}, \qquad BH = \frac{BC\sin\gamma_2}{\sin BHC\sphericalangle} = \frac{12\sin\gamma_2}{\sin(\alpha_1+\gamma_2)},$$
$$AG = \frac{AB \sin\alpha_2}{\sin AGB\sphericalangle} = \frac{24\sin\alpha_2}{\sqrt{3}}, \qquad AJ = \frac{CA\sin\gamma_1}{\sin CJA\sphericalangle} = \frac{12\sin\gamma_1}{\sin(\alpha_2+\gamma_1)}.$$

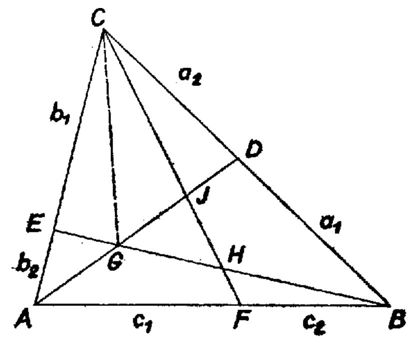
Ezek céljára az ABD, BCF, ACF, ACD háromszögből a koszinusz-tétel, a színusz-tétel és az addíció tétel alapján $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos 60° = 109$, $\quad CF^2 = 112$;

$$\cos\alpha_1 = \frac{19}{2\sqrt{109}}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{17}{2\sqrt{109}}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{5}{2\sqrt{7}};$$
$$\sin\alpha_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{109}}, \quad \sin\alpha_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{109}}, \quad \sin\gamma_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \quad \sin\gamma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}};$$
$$\sin(\alpha_1+\gamma_2) = \frac{11\sqrt{3}}{\sqrt{7\cdot 109}}, \quad \sin(\alpha_2+\gamma_1) = \frac{31\sqrt{3}}{2\sqrt{7\cdot 109}}.$$

Így pedig a keresett szakaszok hossza, valamint a területek aránya

$$BG = \frac{60}{\sqrt{109}}, \quad BH = \frac{6\sqrt{109}}{11}, \quad GH = \frac{6}{11\sqrt{109}}\ (\approx 0{,}052),$$
$$AG = \frac{84}{\sqrt{109}}, \quad AJ = \frac{24\sqrt{109}}{31}, \quad GJ = \frac{12}{31\sqrt{109}}\ (\approx 0{,}037),$$
$$\frac{T'}{T} = \frac{GH\cdot GJ}{144} = \frac{1}{2\cdot 11\cdot 31\cdot 109} = \frac{1}{74\,338}.$$

Gy. Molnár Csaba (Miskolc, Bláthy O. Villamosip. techn. III. o. t.)



2. ábra

Megjegyzés. Tetszés szerinti ABC háromszögből kiindulva (2. ábra) az AGB és AGC háromszögek területeinek aránya egyenlő AG-re merőleges magasságaik arányával, ez pedig a $BD = a_1$ és $CD = a_2$ szakaszok arányával:

$$AGB : AGC = a_1 : a_2.$$

Ugyanígy $BGA : BGC = b_2 : b_1$, és $ABC = ABG + BGC + CAG$ miatt, továbbá hasonlóan

$$ABC = ABG\left(1 + \frac{b_1}{b_2} + \frac{a_2}{a_1}\right), \quad ABG = \frac{a_1 b_2 \cdot ABC}{a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2} = k_1 \cdot ABC;$$
$$BCH = \frac{b_1 c_2 \cdot ABC}{b_1 c_1 + b_1 c_2 + b_2 c_2} = k_2 \cdot ABC, \quad CAJ = \frac{c_1 a_2 \cdot ABC}{c_1 a_1 + c_1 a_2 + c_2 a_2} = k_3 \cdot ABC.$$

Ezekből $GHJ = ABC - ABG - BCH - CAJ$ alapján, kellő rendezés után

$$\frac{GHJ}{ABC} = 1 - k_1 - k_2 - k_3 =$$
$$= \frac{(a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2)^2}{(a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2)(b_1 c_1 + b_1 c_2 + b_2 c_2)(c_1 a_1 + c_1 a_2 + c_2 a_2)}.$$

Innen $a_1 = b_1 = 5$, $a_2 = b_2 = 7$, $c_1 = 8$, $c_2 = 4$ esetére a fenti arányértéket kapjuk.

Amennyiben az AD, BE, CF egyenesek egy P ponton mennek át, G, H, J egybeesnek, a velük meghatározott háromszög területe 0, és így $a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2$. Ez *Ceva* tétele.

(Tusnády Gábor)

Kevesebb számolással érünk célt a koordináta-geometria eljárásával.

II. megoldás. Helyezzünk az adott háromszögre derékszögű koordinátarendszert, X-tengelynek az AB egyenest, Y-tengelynek a C-n átmenő magasság egyenesét választva. Így a csúcsok koordinátái $A(-6;0)$, $B(6;0)$, $C(0;6\sqrt{3})$, a kijelölt pontoké pedig $D(3{,}5;2{,}5\sqrt{3})$, $E(-2{,}5;3{,}5\sqrt{3})$, $F(2;0)$, ugyanis az első kettőnek az X-re való vetületét D'-vel, E'-vel jelölve BDD' és AEE' egy szabályos háromszög fele, és $AE = 7$. Ezekből a megrajzolt egyenesek egyenlete, majd a kérdéses metszéspontok koordinátái:

$$AD: \quad 19y = 5\sqrt{3}(x+6), \quad BE: \quad -17y = 7\sqrt{3}\,(x-6),$$
$$CF: \quad y = -3\sqrt{3}\,(x-2);$$
$$G\left(\frac{144}{109}, \frac{210\sqrt{3}}{109}\right), \quad H\left(\frac{15}{11}, \frac{21\sqrt{3}}{11}\right), \quad J\left(\frac{42}{31}, \frac{60\sqrt{3}}{31}\right).$$

A csúcsainak koordinátáival meghatározott háromszög területképletét[1] alkalmazva a GHJ háromszögre

$$t = \big[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\big]/2 = \frac{18\sqrt{3}}{11 \cdot 31 \cdot 109},$$

másrészt az ABC háromszög területe $AB \cdot OC/2 = 36\sqrt{3}$. Ennélfogva a keresett arányszám $1/(2 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 109) = 1/74\,338$.

Tihanyi László (Makó, József A. g. III. o. t.)

[1] Lásd *Lóky B.:* Négyjegyű függvény táblázatok, 19. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1962, 23. o.