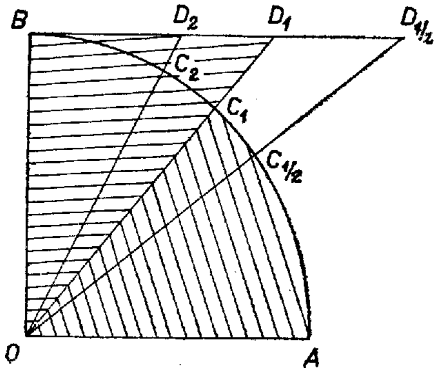
Válasszuk hosszúságegységnek az $OA = OB$ sugarat, és legyen az AOC szög ívmértéke x; C korlátozása miatt $0 < x < \pi/2$. Így $ODB\sphericalangle = x$, és $BD = \operatorname{cotg} x$ (1. ábra), a körcikk és a háromszög területe $x/2$, ill. $(\operatorname{cotg} x)/2$, ezért az

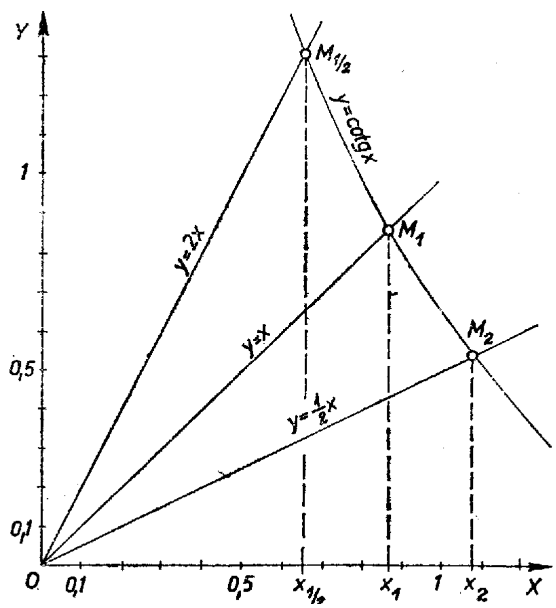
$$x/\operatorname{cotg} x = k, \quad \text{másképpen} \quad x/k = \operatorname{cotg} x$$

egyenletet kell megoldanunk $k = 2$, 1 és 1/2 eseteire.



1. ábra

Ilyen egyenletek pontos megoldására nem ismeretes eljárás, de a megoldás közelítően megkapható, pontosságát a rendelkezésre álló cotg-táblázat pontossága szabja meg. Az előírt pontosság 57,3°/1000, azaz elég x-et 0,05°-nyira meghatározni. – Első közelítő értéket mindhárom esetben az egyenlet két oldalának grafikus ábrázolása útján keresünk, a metszéspont abszcisszáját leolvasva. A 2. ábra eredetijén az egység 10 cm (a nyomtatásban kicsinyítve van felére), az előírt 0,001 pontosságnak 0,1 mm felel meg, így a leolvasás pontossága nem lesz elegendő. Ezért a kapott helyen kiszámítjuk a két oldal különbségét (közelítésünk hibáját), ebből és a grafikonok menetéből javítjuk az első közelítő értéket, vagyis következtetünk arra, hogy melyik irányban és kb. mekkora távolságban van a (valódi) metszéspont. Az így adódó újabb közelítő értékkel ismételjük eljárásunkat, míg a kellő pontosságot elérjük.



2. ábra

$k = 1$ esetén az $y = x$ egyenes és az $y = \operatorname{cotg} x$ görbe M_1 metszéspontjának x_1 abszcisszájára mm pontossággal $x_1' \approx 0{,}86$-ot olvasunk le. Fokra átszámítva $x_1' = 180° \cdot 0{,}86/\pi = 49{,}275°$, így $\operatorname{cotg} x_1' = 0{,}8609$, tehát ezen a helyen a görbe ordinátája nagyobb az egyenes ordinátájánál. Mivel az egyenes (balról jobbra haladva) emelkedik, és a görbe süllyed, azért metszéspontjuk nagyobb abszcisszán lesz: $x_1 > 0{,}86$. Szemlélet szerint a süllyedés kissé meredekebb, mint az emelkedés, így a két ordináta közti 0,0009 különbség a metszéspontig úgy oszlik el, hogy kisebb része jut az egyenes emelkedésére, mint a görbe süllyedésére, vagyis azt sejtjük, hogy M_1 ordinátája kisebb a két ordináta számtani középénél, 0,86045-nél. Valóban, az $x_1'' = 0{,}8604 = 49{,}30°$ második közelítő érték esetében már $\operatorname{cotg} x_1'' = 0{,}8601 < x_1''$, ezért $x_1 < 0{,}8604$, tehát 10^3-ra kerekítve $x_1 = 0{,}860$.

$k = 2$ esetében az $y = x/2$ egyenes és a görbe M_2 metszéspontjára közelítőleg $x_2' = 1{,}08 = 61{,}88°$ olvasható le. Ebből $\operatorname{cotg} x_2' = 0{,}5344 < 0{,}54 = x_2'/2$, ezen az abszcisszán a görbe már alatta van az egyenesnek, ezért $x_2 < 1{,}08$. A görbe meredekebben süllyed, mint ahogyan az egyenes emelkedik, ebből azt sejtjük, hogy M_2 ordinátája nagyobb 0,5344 és

0,5400 számtani közepénél (0,5372-nél), próbálkozzunk ezért 0,538-del, ami az egyenesen az x_2''=1,076-hez, azaz 61,59°-hoz tartozó ordináta. Itt $\operatorname{cotg} x_2'' = 0{,}5396 > x_2''/2$; tehát $x_2'' < x_2 < x_2'$. Az újabb eltérés $0{,}5396 - 0{,}538 = 0{,}0016$, harmadát sem teszi ki az előbbi $0{,}5344 - 0{,}54 = -0{,}0056$ abszolút értékének ezért harmadik próbálkozásként x_2' és x_2'' között az utóbbihoz közelebbi $x_2''' = 1{,}077$-et, azaz $61,70°$-ot vesszük. Itt $\operatorname{cotg} x_2''' = 0,5384 \approx x_2'''/2$, különbségük $-0{,}0002$, tehát 10^{-3}-ra kerekítve $x_2 = 1{,}077$.

Végül $k = 1/2$ esetében a görbe és az $y = 2x$ egyenes $M_{1/2}$ metszéspontjára közelítőleg $x_{1/2}' \approx 0{,}65 = 37{,}24°$, $\operatorname{cotg} x'1/2 = 1{,}315 > 2x_{1/2}'$, így $x_{1/2} > x_{1/2}'$, és $\operatorname{cotg} x_{1/2}' - 2x_{1/2}' = 0{,}015$. A görbe valamivel meredekebben süllyed, mint ahogyan $y = 2x$ emelkedik, várható, hogy $M_{1/2}$ ordinátája 1,30 és 1,315 közepe, azaz 1,3075 alatt lesz, próbálkozzunk $y = 2x_{1/2}''$= 1,306-del, amiből $x_{1/2}'' = 0{,}653 = 37{,}41°$, $\operatorname{cotg} x_{1/2}'' = 1{,}307$, $\operatorname{cotg} x_{1/2}'' - 2x_{1/2}'' = +0{,}001$. Viszont $x_{1/2}''' = 0{,}6535$ esetén már $\operatorname{cotg} x_{1/2}''' - 2x_{1/2}''' = -0{,}001$, ezért a kívánt pontossággal $x_{1/2} = 0{,}653$.

Solymosi András (Budapest, Petőfi S. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Az első közelítő értékek javítása céljára a szemléletre támaszkodva végzett meggondolásnál valamivel pontosabbnak látszik a következő. Egyenletünk átírható

$$x \operatorname{tg} x - k = 0$$

alakba. Legyen a gyök egy jó közelítő értéke x_0, vagyis $x_0 \cdot \operatorname{tg} x_0 - k \neq 0$, de a bal oldal $|x_0 \cdot \operatorname{tg} x_0 - k| = |d_0|$ abszolút értéke kicsi a különbség tagjainak abszolút értékéhez képest. Erre támaszkodva közelítő értéket keresünk az x gyök és az x_0 közelítő érték h különbségére abból, hogy várhatóan ez is kicsi érték x_0-hoz képest. $x - x_0 = h$-ból $x = x_0 + h$, ez kielégíti az egyenletet, vagyis

$$(x_0 + h) \operatorname{tg} (x_0 + h) - k = (x_0 + h) \cdot \frac{\operatorname{tg} x_0 + \operatorname{tg} h}{1 - \operatorname{tg} x_0 \cdot \operatorname{tg} h} - k = 0. \tag{1}$$

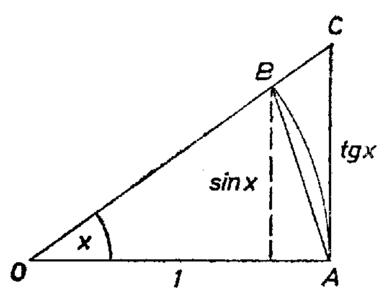
A törtet eltávolítva az egyenlet így rendezhető át:

$$\begin{aligned} &(x_0 \operatorname{tg} x_0 - k) + h\,(\operatorname{tg} x_0 + x_0 + k \operatorname{tg} x_0) + \\ &+ (\operatorname{tg} h - h)(x_0 + k \operatorname{tg} x_0) + h \cdot \operatorname{tg} h = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

A bal oldal utolsó két tagját az előbbiek mellett elhanyagolhatjuk. Ismeretes ugyanis, hogy a $0° - 5°$ közti szögek tangense közelítőleg egyenlő ívmértékükkel, ezért a 3. tagbeli $(\operatorname{tg} h - h)$ tényező kicsi a 2. tagbeli h-hoz képest (és e két tag másik tényezői közül is az előbbi a nagyobb), a 4. tagnak pedig várhatóan mindkét tényezője kicsi. Mivel az első zárójelben d_0 áll, azért (2) meghagyott tagjaiból közelítőleg

$$h \approx -\frac{d_0}{x_0 + (k+1) \operatorname{tg} x_0}.$$

Pl. a fenti k=0,5 és $x_0 = 0{,}65 = 37{,}24°$ esetében tg $x_0 = 0{,}7601$, $d_0 \approx 0{,}4941 - 0{,}5 = -0{,}0059$ (kisebb, mint a különbség tagjainak 2%-a), ezekből $h \approx 0{,}0033$ és $x_{1/2}' + h$=0,6533, kerekítve 0,653. (Így $h = 0{,}19°$, $\operatorname{tg} h = 0{,}0033$ és $h \cdot \operatorname{tg} h \approx 1,1 \cdot 10^{-5}$, valóban alatta van annak a 10^{-4} hibának, amit a táblázat használatával elkövethetünk.)[1]



3. ábra

[1]Az iskolai függvénytáblázat szerint $\sin x$ és $\operatorname{tg} x$ értéke 10^{-4}-re kerekítve még $x = 2{,}6°$-nál egyenlő. Másrészt a szög ívmértéke a 3. ábra szerint ezek közé esik ($0 < x < \pi/2$ esetén) $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, mert $\sin x$-et az OAB háromszög, x-et az OAB körcikk, $\operatorname{tg} x$-et az OAC háromszög 2-szeres területe szemlélteti.