**I. megoldás.** Azt kell belátnunk, hogy (1) bal oldala első 3 tagja összegének értéke $i=1,2$ esetén: $x_i(x_i^4-5x_i^2+5)=1$. Négyzetre emelésekkel, figyelembe véve (3)-at, szorzással és összevonással

$$\begin{aligned}
x_1^2 &= \left(18+2\sqrt{5}-\sqrt{u}+\sqrt{5u}\right)/8,\\
x_1^4 &= \left(58+6\sqrt{5}-2\sqrt{u}+4\sqrt{5u}\right)/8,\\
x_1^4-5x_1^2+5 &= \left(8-4\sqrt{5}+3\sqrt{u}-\sqrt{5u}\right)/8,
\end{aligned}$$

ez pedig $x_1$ gyel szorozva valóban 1-et ad. Hasonlóan kapjuk, hogy az állítás $x_2$-re is teljesül.

Számításunk akkor is érvényes, ha $\sqrt{u}$, ill. $\sqrt{v}$ helyére a negatívját írjuk, eszerint

$$x_3=\left(-1+\sqrt{5}-\sqrt{u}\right)/4, \qquad x_4=\left(-1-\sqrt{5}-\sqrt{v}\right)/4$$

is kielégíti (1)-et. Végül $x_5=1$ is gyök, mert az együtthatók összege 0. Több gyök nincs, mert algebrai egyenletnek legfeljebb annyi szám tesz eleget, mint amennyi az egyenlet fokszáma.

**II. megoldás.** Az egyenlet egyik gyöke 1, a bal oldali polinom

$$(x-1)(x^4+x^3-4x^2-4x+1)$$

alakban írható.

Ha megmutatjuk, hogy a második tényezőből kiemelhető az $(x-x_1)(x-x_2)=x^2-Ax+B$ polinom, más szóval alkalmas $\alpha$, $\beta$ számokra

(4) $$(x^2-Ax+B)(x^2+\alpha x+\beta)=x^4+x^3-4x^2-4x+1,$$

ebből következik, hogy $x_1$ és $x_2$ is gyöke az egyenletnek, és $\alpha$ és $\beta$ meghatározása után a további két gyököt is kiszámíthatjuk. (2) szerint

$A=x_1+x_2=\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right)/4-1/2,$

$B=x_1x_2=\left(3\sqrt{5}-1\right)/4-\left(\sqrt{u}+\sqrt{5u}+\sqrt{v}-\sqrt{5v}\right)/16,$

ugyanis $\sqrt{uv}=12\sqrt{5}$. (4) teljesül, ha fennáll, hogy

(5) $$\alpha-A=1, \qquad \beta-A\alpha+B=-4, \qquad B\alpha-A\beta=-4, \qquad B\beta=1.$$

Az első és utolsó követelmény szerint

$$\alpha=A+1=\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right)/4+1/2, \qquad \beta=1/B=(1/x_1)\cdot(1/x_2).$$

Mivel továbbá

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1} &= \frac{4}{-1+\sqrt{5}+\sqrt{u}} == \frac{4\left(\sqrt{u}+1-\sqrt{5}\right)}{u-\left(\sqrt{5}-1\right)^2} =\\
&= \frac{\sqrt{u}+1-\sqrt{5}}{2\left(3+\sqrt{5}\right)} == \frac{\left(3-\sqrt{5}\right)\sqrt{u}}{8}-\frac{\sqrt{5}}{2}+1,
\end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\frac{1}{x_2}=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{v}}{8}+\frac{\sqrt{5}}{2}+1,$$

így $\beta$-ra

$$\beta=\frac{3\sqrt{5}-1}{4}+\frac{\sqrt{u}+\sqrt{5u}+\sqrt{v}-\sqrt{5v}}{16}$$

adódik. Ezekből a második és harmadik követelmény bal oldala

$$A\alpha=\frac{\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right)^2-4}{16}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}, \quad \beta+B-A\alpha=-4,$$

végül

$$\begin{aligned}
B\alpha-A\beta &= \left(3\sqrt{5}-1\right)/4-\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right)\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{5u}-\sqrt{5v}\right)/32=\\
&= \left(3\sqrt{5}-1\right)/4-\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right)^2/32-\sqrt{5}(u-v)/32=-4.
\end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az (5) alatti egyenlőségeket. (1) hátra levő két gyöke az

$$x^2+\alpha x+\beta=0$$

másodfokú egyenlet két gyöke. Itt a fentiek szerint $\alpha$ is, $\beta$ is úgy áll elő $-A$-ból, ill. $B$-ből, hogy ezekben $\sqrt{u}$ és $\sqrt{v}$ mindegyike helyére a negatívját írjuk, ennélfogva ugyanígy kaphatjuk meg $x_3$ és $x_4$ kifejezését $x_1$ ből és $x_2$-ből.

*Bottyán János* (Hatvan, Bajza J. g. III. o.t.)
*Bárány Imre* (Budapest-Mátyásföld, Corvin Mátyás g. IV. o. t.)

*Megjegyzés.* Célhoz segít a következő sejtés is. $x_1$ és $x_2$ kifejezése emlékeztet a másodfokú egyenlet gyökképletére. $u$ is, $v$ is tartalmazza a külön is szereplő $\sqrt{5}$-öt, ezért $u$-t, $v$-t próbáljuk diszkriminánsnak venni, vagyis az $x_1$-et ($x_2$-t) adó másodfokú egyenlet másik gyökét $\sqrt{u}$ (ill.$\sqrt{v}$) negatívjával képezni. Ha ez a sejtés helyes, akkor

$$x_1+x_3=\left(-1+\sqrt{5}\right)/2,\quad x_1x_3=\left[\left(-1+\sqrt{5}\right)^2-u\right]/16=-\left(3+\sqrt{5}\right)/2,$$
$$x_2+x_4=\left(-1-\sqrt{5}\right)/2,\qquad x_2x_4=-\left(3-\sqrt{5}\right)/2,$$

a kérdéses másodfokú egyenletek bal oldalai:

$$x^2-\left(\sqrt{5}-1\right)x/2-\left(3+\sqrt{5}\right)/2,\qquad x^2+\left(\sqrt{5}+1\right)x/2-\left(3-\sqrt{5}\right)/2.$$

Ezek szorzata (4) jobb oldalát adja, igazolja az adott $x_1$ és $x_2$, valamint a megsejtett $x_3$ és $x_4$ szám gyök voltát.

*Deák Jenő* (Budapest, Kölcsey F. g. IV. o. t.)