a) A két polinom szorzata 12-edfokú, x-nek csak páros kitevőjű hatványait tartalmazza. x^{12} együtthatója és az x-től mentes tag 1. Válasszuk a megengedett 3. tagban a kitevőt 6-nak, így x^{10}, x^8, x^4 és x^2 együtthatójának kell eltűnnie:

$$2A-16=0, \tag{3}$$
$$A^2-8B+2C=0, \tag{4}$$
$$2A-2BD+C^2=0, \tag{5}$$
$$2C-D^2=0. \tag{6}$$

(3)-ból $A=8$, (6)-ból $C=D^2/2$, (4)-ből és (6)-ból $B=8+C/4=8+D^2/8$, és ezeket (5)-be helyettesítve

$$\begin{aligned} D^4-D^3-64D+64&=(D-1)(D^3-64)=\\ &=(D-1)(D-4)(D^2+4D+16)=0. \end{aligned}$$

Az első két tényező eltűnéséből 1–1 megfelelő értékrendszert kapunk:

$$\begin{array}{lll} D_1=1, & B_1=65/8, & C_1=1/2; \\ D_2=4, & B_2=10, & C_2=8, \end{array}$$

és ekkor a két polinom szorzata:

$$x^{12}+\frac{4097}{64}x^6+1, \qquad \text{ill.} \qquad x^{12}-2x^6+1=\left(x^6-1\right)^2.$$

b) Könnyű észrevenni, hogy mindjárt a kapott második értékrendszer is megfelel a második követelménynek, ekkor a két polinom:

$$\begin{aligned} \left(x^3+2x^2+2x+1\right)^2&=\left[(x^3+1)+2x(x+1)\right]^2=(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)^2,\\ \left(x^3-2x^2+2x-1\right)^2&=\left[(x^3-1)-2x(x-1)\right]^2=(x-1)^2\left(x^2-x+1\right)^2. \end{aligned}$$

Általában (1) és (2) akkor azonos az x^3+2x^2+bx+c, ill. $x^3-2x^2+b'x+c'$ polinom négyzetével, ha teljesül

$$\left.\begin{aligned} 4+2b&=A,\\ 2c+4b&=B,\\ 4c+b^2&=C,\\ 2bc&=D,\\ c^2&=1; \end{aligned}\right\} \qquad \text{illetőleg} \qquad \left.\begin{aligned} 4+2b'&=A,\\ 2c'+4b'&=-B,\\ -4c'+b'^2&=C,\\ 2b'c'&=-D,\\ c'^2&=1. \end{aligned}\right\}$$

A második feltételeket (balról és jobbról) összeadva, az ötödikeket kivonva

$$(c+c')+2(b-b')=0, \qquad\qquad c^2-c'^2=(c+c')(c-c')=0.$$

Ezek mindegyike, valamint az első négy feltételpár is teljesül, ha $c'=-c$, és $b'=b$, végül az ötödik feltételből $c=1$. Eszerint bármely valós b paraméter esetén megfelel

$$A=2b+4, \qquad B=4b+2, \qquad C=b^2+4, \qquad D=2b,$$

és ekkor

$$\begin{aligned} x^6\pm4x^5+(2b+4)x^4\pm(4b+2)x^3+(b^2+4)x^2\pm2bx+1&=\\ =\left(x^3\pm2x^2+bx\pm1\right)^2&. \end{aligned}$$

Fenti észrevételünk innen $b=2$ esetén adódik.

Csirmaz László (Budapest, I. István g. I. o. t.)