I.

Található-e olyan c szám, amely mellett az

$$x^3 - 6x^2 - 271x + c = 0$$

egyenletnek mindegyik gyöke (valós és) egész szám?

Telkes

Megoldás. A számítás egyszerűsítése végett alakítsuk át az egyenletet $y^3 + py + q = 0$ alakra. Legyen $x = y + a$. Ekkor

$$(y+a)^3 - 6(y+a)^2 - 271(y+a) + c = 0,$$

és y hatványai szerint rendezve

$$y^3(3a-6)y^2 + \big(3a^2 - 12a - 271\big)y + \big(a^3 - 6a^2 - 271a + c\big) = 0.$$

Az y^2 együtthatója zérus, ha $3a - 6 = 0$, vagyis ha $a = 2$. Ekkor az egyenlet alakja

(1) $$y^3 - 283y + (c - 558) = 0\ldots$$

Vizsgáljuk, hogy az (1) egyenletnek c mely értékénél van három valós egész számú gyöke? (Ez esetben lesz az eredeti egyenletnek is).

Írjuk fel az egyenletet

(2) $$y\big(b^2 - 283\big) = -(c - 558)\ldots$$

alakban. Innen minden egész számú y érték mellett kapunk egy egész számú c értéket. Azt kell megállapítanunk, hogy mely c (ill. y_1) értéknél kapunk még két egész számú megoldást. Ha az egyenlet gyökei y_1, y_2 és y_3, akkor az (1) egyenlet együtthatói szerint

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \text{ vagyis } -(y_2 + y_3) = y_1, \text{ ezenkívül } y_1y_2y_3 = -(c - 258)$$

és figyelembe véve a (2) egyenletet is

$$y_1\big(y_1^2 - 283\big) = y_1y_2y_3, \quad \text{tehát} \quad y_2y_3 = y_1^2 - 283.$$

Eszerint az egyenlet két gyökét meghatározza a

$$z^2 + y_1z + \big(y_1^2 - 283\big) = 0$$

egyenlet, ahol y_1 valós egész szám. [1] Az egyenlet két gyöke is ilyen, ha az egyenlet diszkriminánsa pozitív és teljes négyzet:

$$D \equiv y_1^2 - 4\big(y_1^2 - 283\big) = 1132 - 3y_1^2.$$

$D > 0$, ha $y_1^2 < \dfrac{1132}{3}$, ill. $|y_1| < 20$. Ha zérus és 20 között megvizsgáljuk az egész számokat, mint y_1 abszolút értékeit, azt látjuk, hogy $|y_1| = 19$, 13 és 6 esetében teljes négyzet a diszkrimináns. Ezek közül -19, $+13$ és $+6$ mellett a (2) egyenlet szerint $c - 558 = 1482$, vagyis $c = 2040$, továbbá $+19$, -13 és 6 esetében $c - 558 = 1482$, vagyis $c = -924$. Miután három-három y érték mellett ugyanazon c értékeket kapjuk, azért ez a két értékcsoport egy-egy harmadfokú egyenletnek a három gyöke. Ezért az eredeti egyenlet keresett alakja

$$x^3 - 6x^2 - 271x + 2040 = 0, \quad \text{ill.} \quad x^3 - 6x^2 - 271x - 924 = 0.$$

Az egyenletek gyökei $x - y + 2$ szerint $x_1 = 17$, $x_2 = 15$ és $x_3 = 8$, ill. $x_1' = 21$, $x_2' = 11$ és $x_3' = -4$.

Komlós János (áll. gr.Széchenyi István gyak. r. VII. o. Pécs)

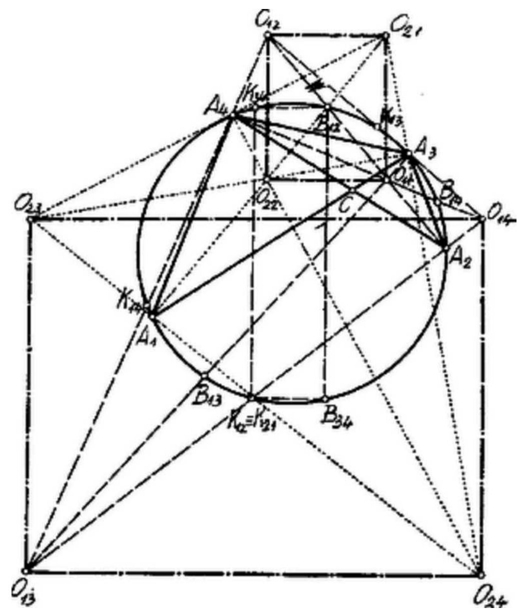
II.

Tekintsük az $A_1A_2A_3A_4$ húrnégyszög egyenesei által meghatározott $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$ és $A_2A_3A_4$ háromszögeket. Bizonyítsuk be, hogy ezen háromszögekbe beírt és hozzáírt körök középpontjai – számszerint $4 \times 4 = 16$ – négyesével az A_1A_3 és A_3A_4 átlók szögeinek egymásra merőleges felezőivel párhuzamos $4 - -4$ egyenesen helyezkednek el.

Bakos Tibor

[1] Ezen egyenletben y_1 helyett írható y_2, ill. y_3. Ebből következik, hogy ezek abszolút értékei 19, 13, 6. Minthogy

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \quad \text{vagy} \quad -19 + 13 + 6 = 0 \quad \text{vagy} \quad 19 - 13 - 6 = 0.$$



Megoldás. Az $A_2A_3A_4$ háromszög be- és hozzáírt köreinek középpontjai legyenek rendre O_{11}, O_{12}, O_{13}, O_{14} (O_{12}, O_{13}, O_{14} az A_2, A_3, A_4-ból kiinduló belső szögfelezőn). Az ezeket meghatározó belső és külső szögfelezők minden csúcsban merőlegesek egymásra és így a belső szögfelezők *magasságvonalai*, O_{11} pedig *magasságpontja* a külső szögfelezők alkotta $O_{12}O_{13}O_{14}$ háromszögnek. Megfordítva, ehhez az utóbbihoz az eredeti háromszög mint talpponti háromszög, az eredeti kör (a húrnégyszög körülírt köre) pedig mint ennek körülírt köre, tehát mint Feuerbach-kör tartozik hozzá. Ezért a körnek a belső és külső szögfelezőkkel való második metszéspontjai, B_{12}, B_{13}, B_{14} és K_{12}, K_{13}, K_{14} mint a Feuerbach-körnek a magasságokkal, illetőleg oldalakkal közös pontjai, felezik a 4 érintőkör középpontja közötti 6 távolságot. Ugyanezek a pontok, mint egy-egy kerületi szög felezőjének a körrel való metszéspontjai, még az illető szög szárai közé eső körívet is felezik – pl. B_{12} és K_1 az A_3A_1 íveket – és így az összetartozó párok a háromszög egy-egy oldalára merőleges átmérő végpontjai. Pl. $\overline{B_{12}K_{12}}$ az A_3A_4 oldalra merőleges, B_{12} az A_2-t nem tartalmazó A_3A_4 íven van, ez, mint a belső szögfelező metszése, a belső ívfelezőpont, K_{12} pedig a külső. A B_{12} pont mint az $O_{11}O_{12}A_3$ és $O_{11}O_{12}A_4$ derékszögű háromszögek közös átfogójának felezőpontja, mindkét háromszög körülírt körének középpontja, tehát

(1a) $$\overline{O_{11}O_{12}} = 2\cdot\overline{A_3B_{12}} = 2\cdot\overline{A_4B_{12}}\ldots$$

Hasonlóan K_{12} és az $O_{13}O_{14}A_3$ és $O_{13}O_{14}A_4$ derékszögű háromszögek révén

(1b) $$\overline{O_{13}O_{14}} = 2\cdot\overline{A_3K_{12}} = 2\cdot\overline{A_4K_{12}}\ldots$$

Tekintsük most az $A_2A_3A_4$ háromszöget. Az előzőkhöz hasonlóan és azonos jelölésmóddal „1" és „2" indexeket felcserélve

$$\overline{O_{22}O_{21}} = 2\cdot\overline{A_3B_{21}} = 2\cdot\overline{A_4B_{21}} \quad \text{valamint} \quad \overline{\mathrm{O_{23}O_{24}}} = 2\cdot\mathrm{A_3K_{21}} = 2\cdot\overline{\mathrm{A_4K_{21}}}.$$

Mivel azonban A_1 ugyanazon az A_3A_4 íven van, mint A_2, számára belső és külső ívfelezőpont ugyanaz, mint A_2-nél, azért a B_{21} és B_{12}, valamint K_{21} és K_{12} pontok azonosak és így

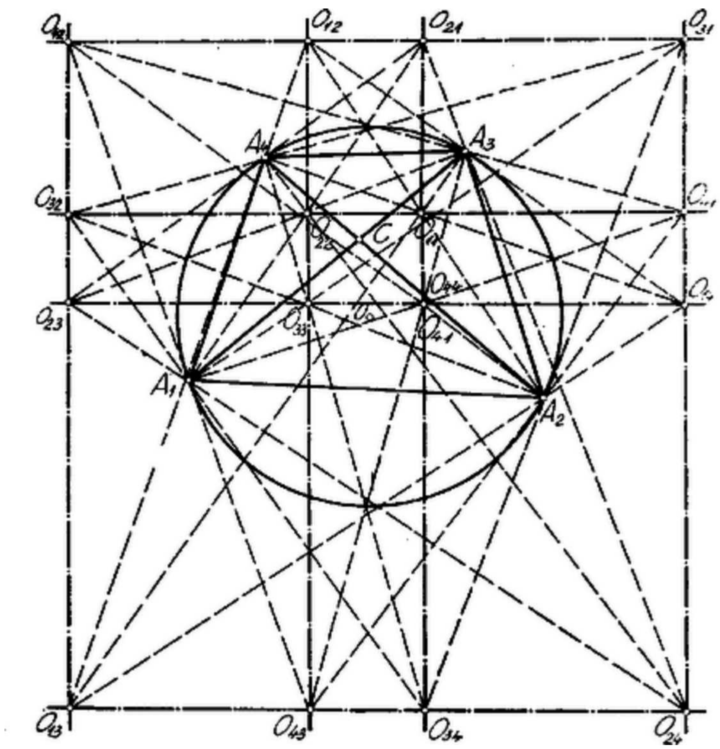
(2a) $$\overline{O_{22}O_{21}} = 2\cdot\overline{A_3B_{12}} = 2\cdot\overline{A_1B_{12}}\ldots \text{és}$$

(2b) $$\overline{O_{23}O_{24}} = 2\cdot A_3K_{12} = 2\cdot\overline{A_4K_{12}}\ldots$$

(1a) és (2a), valamint (1b) és (2b) szerint az $\overline{O_{11}O_{12}}$ és $\overline{O_{22}O_{21}}$, valamint $\overline{O_{13}O_{14}}$ és $\overline{O_{23}O_{24}}$ távolságok egyenlők és felezik egymást (ugyanis felezőpontjaik B_{12} és K_{12} azonosak) és így végpontjaik egy-egy derékszögű egyenlő közű négyszög csúcsai.

Állapítsuk meg ezekben a téglalapokban az oldalak irányait az eredeti húrnégyszöghöz viszonyítva! Felhasználjuk azt, hogy téglalap oldalai párhuzamosak átlóinak szögfelezőivel, továbbá azt, hogy, ha $e_1 \perp f_1$, és $e_2 \perp f_2$, akkor az e_1 e_2, valamint f_1, f_2 egyenespárok alkotta szögek felezői is párhuzamosak, illetve merőlegesek.

Téglalapjaink átlóinak egyik-egyik szöge szerkesztés folytán az A_1A_2 ívek valamelyikén nyugvó kerületi szög, felezőik eszerint átmennek ezeknek az íveknek B_{34} illetőleg K_{34} felezőpontjain és így az $O_{11}O_{12}O_{22}O_{21}$, téglalap oldalai egyirányúak $\overline{B_{12}B_{34}}$ és $\overline{B_{12}K_{34}}$, az $O_{13}O_{24}O_{14}O_{23}$ pedig $K_{12}B_{34}$ és $\overline{K_{12}K_{34}}$-gyel. Sőt mivel az itt szereplő négy pont alkotta négyszög átlói átmérők, az maga is téglalap, ezért eredeti téglalapjaink oldalai egymással is és a $B_{12}B_{34}K_{12}K_{34}$ téglalap oldalaival, és így átlóinak szögfelezőivel is párhuzamosak. Ezek az átlók viszont a korábbiak szerint merőlegesek a húrnégyszög szembenfekvő A_1A_2 és A_3A_4 oldalaira, és így a keresett irányok az előre idézett segédtételnél fogva párhuzamosak azoknak a szögeknek a felezőivel, amelyeket az említett oldalak meghosszabbításai alkotnak és az *1214.* feladat szerint az átlók szögfelezőivel is.[1]



Az átlók metszéspontját C-vel, az A_1CA_2 és A_2CA_3 szögek felezőit pedig f_1 és f_2-vel jelölve eddigi eredményünk így írható:

$$\overline{O_{11}O_{21}},\ \overline{O_{12}O_{22}},\ \overline{O_{13}O_{23}},\ \overline{O_{14}O_{24}} \quad \text{párhuzamosak} \quad f_1\text{–gyel},$$
$$\overline{O_{11}O_{22}},\ \overline{O_{12}O_{21}},\ \overline{O_{13}O_{24}},\ \overline{O_{14}O_{23}} \quad \text{párhuzamosak} \quad f_2\text{–vel}$$

Ezekből az indexek ciklikus permutációjával még a következők adódnak:

$$\overline{O_{22}O_{33}},\ \overline{O_{23}O_{32}},\ \overline{O_{24}O_{31}},\ \overline{O_{21}O_{34}},\ \overline{O_{33}O_{43}},\ \overline{O_{34}O_{44}},\ \overline{O_{31}O_{41}},\ \overline{O_{32}O_{42}},\ \overline{O_{44}O_{11}},\ \overline{O_{41}O_{14}},\ \overline{O_{42}O_{13}},\ \overline{O_{43}O_{12}}$$

párhuzamosak f_1-gyel,

$$\overline{O_{22}O_{32}},\ \overline{O_{23}O_{33}},\ \overline{O_{24}O_{34}},\ \overline{O_{21}O_{31}},\ \overline{O_{33}O_{44}},\ \overline{O_{34}O_{43}},\ \overline{O_{31}O_{42}},\ \overline{O_{32}O_{41}},\ \overline{O_{44}O_{14}},\ \overline{O_{41}O_{11}},\ \overline{O_{42}O_{12}},\ \overline{O_{43}O_{13}},$$

párhuzamosak f_2-vel,

Ebben a felsorolásban minden középpont négyszer lép fel és pedig a két egymásra merőleges irány mindegyike mentén kétszer-kétszer. A $16-16$ egyirányú távolság négyes csoportokra osztható úgy, hogy egy-egy csoport távolságait ugyanaz a négy pont határolja, amiből nyilvánvaló, hogy az illető négy pont egy egyenesen fekszik. Így pl. mivel $\overline{O_{13}O_{23}}$, $\overline{O_{23}O_{32}}$, $\overline{O_{32}O_{42}}$ és $\overline{O_{42}O_{13}}$ mind párhuzamosak f_1-gyel és így egymással is, azért O_{13}, O_{23}, O_{32} és O_{42} egy az f_1-gyel párhuzamos egyenes pontjai.

B. T.

III.

Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű parallelepipedonnak, P-nek, négy nem ugyanegy síkban fekvő csúcsa négy koncentrikus gömbön mozog, akkor annak a többi négy csúcsa is amazokkal közös középpontú gömbön mozog, még akkor is, ha P-nek alakja változik. E nyolc gömb közül több egybe eshetik, és pedig, ha P-nek:

a) egy élen levő két csúcsa ugyan egy gömbön mozog, akkor ez éllel parallel három élen levő két-két csúcs szintén egy-egy gömbön mozog;

b) egy lapján levő három csúcsa ugyanegy gömbön mozog, akkor e lapon levő negyedik csúcs is e gömbön marad, míg a többi 4 csúcs egy másik gömbön lesz;

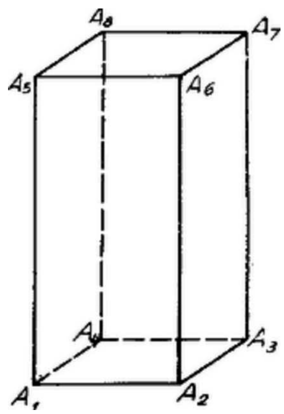
c) három csúcsa, melyek közül kettő szemben fekvő, ugyanegy gömbön mozog, akkor a harmadik csúccsal szemben fekvő csúcs is e gömbön marad, míg a többi négy csúcs páronként két másik gömbön mozog;

[1] I. XII. évf. 261.o. (1936/5 – a szerk.)

d) három olyan csúcsa, melynek síkjában a P-nek nincs több csúcsa, egy gömbön mozog, akkor P-nek ezzel szemben fekvő három csúcsa egy másik gömbön mozog, míg a hátralevő szembenfekvő két csúcs egy-egy gömböt ír le;

e) a négy mozgó csúcsa ugyanegy gömbön marad, akkor ugyanegy gömbön marad P-nek többi négy csúcsa is.

Klug



Megoldás. Legyen a gömbök középpontja O, és P-nek négy nem egy síkban fekvő csúcsa A_1, A_2, A_3, és A_6. Az O pontból P-nek tetszés szerinti helyzetében a A_1, A_2, A_3 síkra bocsátott merőleges talppontját jelölje M. Ha az $A_1A_2A_3$, síkban fekvő negyedik csúcs A_4, akkor mint ismeretes,[2] a síkban fekvő bármely pontra, és így M-re nézve is fennáll: $\overline{MA}_1^2 + \overline{MA}_3^2 = MA_2^2 + MA_4^2$ (ha A_1 és A_3 a téglalap szembenfekvő csúcsai).

Ezenkívül pedig

$$\overline{OA}_1^2 + \overline{OA}_3^2 = \left(\overline{MA}_1^2 + \overline{OM}^2\right) + \left(\overline{MA}_3^2 + \overline{OM}^2\right) = \overline{MA}_1^2 + MA_3^2 + 2 \cdot \overline{OM}^2 \qquad \text{és}$$
$$\overline{OA}_2^2 + \overline{OA}_4^2 = \left(\overline{MA}_2^2 + \overline{OM}^2\right) + \left(\overline{MA}_4^2 + \overline{OM}^2\right) == \overline{MA}_2^2 + \overline{MA}_4^2 + 2 \cdot OM^2.$$

Az egyenletek szerint

$$\overline{OA}_1^2 + \overline{OA}_3^2 = OA_2^2 + \overline{OA}_4^{2\,3}$$

ami azt fejezi ki, hogy ha OA_1 és OA_2 és OA_3 állandó távolságok, akkor állandó OA_4 is. E szerint az A_4 csúcs is egy O középpontú gömbön mozog. Hasonlóképpen, ha az $A_1A_2A_6$ síkban fekvő negyedik csúcs A_5, mivel OA_1, OA_2, és OA_6 állandó, nem változik az OA_5 távolság sem. Ugyancsak ez a helyzet az $A_2A_3A_6$ síkban fekvő A_7 pontnál is. Mivel most már tudjuk, hogy OA_5, OA_6 és OA_7 is állandó távolságok, bizonyítva van, hogy OA_8 is állandó. Látjuk tehát, hogy a nyolc pont általában nyolc koncentrikus gömbön mozog.

Különös esetek:

a) Az A_1 és A_2 csúcs egy gömbön mozog, azaz $OA_1 = OA_2$. Láttuk, hogy

$$\overline{OA}_1^2 + \overline{OA}_3^2 = \overline{OA}_2^2 + \overline{OA}_4^2, \quad \text{tehát} \quad OA_3 = OA_4,$$
$$\overline{OA}_1^2 + \overline{OA}_6^2 = \overline{OA}_2^2 + \overline{OA}_5^2, \quad \text{tehát} \quad OA_5 = OA_6,$$
$$\overline{OA}_1^2 + \overline{OA}_7^2 + \overline{OA}_2^2 + \overline{OA}_8^2, \quad \text{tehát} \quad OA_7 = OA_8,$$

vagyis: A_3 és A_4, A_5 és A_6, A_7, és A_8 egy-egy gömbön maradnak.

b) Az A_1, A_2 és A_3 csúcsok egy gömbön maradnak. Az *a)* eset szerint, ha $OA_1 = OA_2$ akkor $OA_3 = OA_4$ vagyis az egy lapon lévő négy csúcs egy gömbön mozog. Ugyancsak az *a)* esetből következik, hogy $OA_5 = OA_6$ és $OA_7 = OA_8$, de mivel $OA_6 = OA_7$, azért a másik lapon fekvő négy csúcshoz is egyenlő sugarak tartoznak.

c) A_1 és A_7 szembenfekvő csúcsok, továbbá A_2 is egy gömbön mozog. Mivel az A_1A_2 éllel párhuzamos A_7A_8, azért az A_8 csúcs is a három említett csúccsal egy gömbön van, míg A_3 és A_4 továbbá A_5 és A_6 egy gömbön mozog.

d) A_1, A_3 és A_6 egy gömbén mozog. Az első esettel megegyező módon bebizonyíthatjuk azt is, hogy ha valamelyik lap átlóján lévő két csúcs egy gömbön mozog, akkor az ezzel párhuzamos átlón levő két csúcs is egy gömbön marad. Eszerint egy gömbön van A_5 és A_7, A_4 és A_5, továbbá A_4 és A_7 ill. egy gömbön mozog A_4, A_5 és A_7. Az A_2 és A_8 ha egyéb feltétel nincs, külön gömbökön mozognak.

e) Az A_1, A_2 A_3 és A_6 csúcs mozogjon egy gömbön. Az *a* esetben bizonyítottakat figyelembe véve A_1 csúccsal azonos gömbön van A_4 és A_5, az A_6 csúccsal A_7. Így A_5 és A_8 is ugyanazon gömbön mozog. Ezeket összevetve azt kapjuk, hogy mind a nyolc csúcs ugyanazon a gömbön mozog. (Csak négy nem egy síkban fekvő esetében áll fenn.)

[2]L: 1003 gyakorlat (XII. évf. 2.szám –1935/10. 42. old.)
3

[3]Ilyen összefüggés érvényes bármely 4 olyan szögpontra, amelyek egy téglalap csúcsai, tehát pl. az A_1, A_2, A_7, A_8 szögpontokra is.

Komlós János (áll. gr. Széchenyi István gyak. r. VII. o. Pécs)

Jegyzet. Négy nem egy síkban fekvő csúcspontot úgy is kiszemelhetünk, hogy kettőt az alapsíkról, kettőt a fedőlap síkjáról, mint két kitérő átló végpontjait vesszük. Pl. A_1, A_3, A_8, A_6.

Ebben az esetben is ugyanazon eredményre jutunk. T. i. az

$$\overline{OA}_1^2+\overline{OA}_3^2=\overline{OA}_2^2+\overline{OA}_4^2 \quad \text{és} \quad \overline{OA}_2^2+\overline{OA}_8^2=\overline{OA}_6^2+\overline{OA}_4^2$$

egyenletekből következik, hogy ha OA_1, OA_3, AO_6, AO_8 állandó távolságok, akkor OA_2 és OA_4 is azok. Hasonlóan mutatható ki, hogy OA_5 és OA_7 is állandó értékek.

....

Közlésünkből kitűnik, hogy mindhárom tételt ketten oldották meg: Komlós János és Nagy Elemér (ciszterci Szent Imre reálgimn. VII. o. Bp.)

Tekintettel arra, hogy Komlós János különösen az I. tételt oldotta meg rövidebben és ügyesebben, neki ítéljük első díj gyanánt KÜRSCHÁK "Matemetikai versenytételek" c. művét. Mint második díjat, folyóiratunk II. évfolyamát Nagy Elemérnek adjuk.

A II. tétel megoldásaként a kitűzőét közöltük.

Szerk