1. feladat

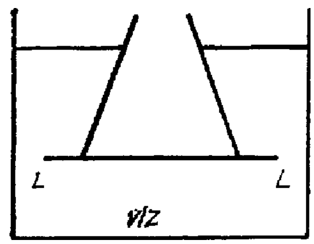
I. A rajznak megfelelő alakú edényt annyira nyomunk be a vízbe, hogy a feneke gyanánt szolgáló lap (LL) *éppen leesik, ha* 1 kg *súlyú vizet töltünk az edénybe. Leesik-e a lap, ha*

a) 1 kg *higanyt*

b) 1 kg *alkoholt*

c) 1 kg *súlyú ólomdarabot helyezünk reá?*

II. Mi lesz, ha a belemerített edény bővül? A feleleteket indokoljunk meg!



Megoldás. I. Jelentse E a külső, e a belső, az LL lappal elzárt edényt. Az LL lap akkor esik le ha az e-be töltött víz színe eléri az E-ben levő víz színét, ill. ha az e-be töltött folyadék fenéknyomása megegyezik az E-ben levő víznek az LL lapra gyakorolt, felfelé irányított nyomásával[1]. Ennek nagyságát a hsg szorzat fejezi ki, ahol h az LL lapnak az E-ben levő víz színétől való távolságát és s a víz sűrűségét jelenti. Ha már most T jelenti az e edény alaplapjának, t az e edénynek az E-ben levő víz színén levő keresztmetszetének területét, akkor

$$\frac{1}{3}hsg(T+\sqrt{Tt}+t)$$

jelenti az e edénybe töltött, h magasságú vízoszlop súlyát, azaz 1 kg súlyát.

a) Legyen már most a higany sűrűsége $s'(>s)$ és az 1 kg súlyú higany magassága h', a higany felszínének területe t'. Nyilván $h'<h$ és így $t'>t$. Már most feltételünk szerint

$$\frac{1}{3}h's'g(T+\sqrt{Tt'}+t')=\frac{1}{3}hsg(T+\sqrt{Tt}+t)$$
$$\frac{h's'}{hs}=\frac{T+\sqrt{Tt}+t}{T+\sqrt{Tt'}+t'}<1,$$

mert $t<t'$ és így

$$h's'<hs,$$

azaz a higany fenéknyomása kisebb a vízénél: az LL lap nem esik le.

b) Jelölje $s''(<s)$ az e edénybe öntött 1 kg súlyú alkohol sűrűségét és h'' a magasságát, felszínének területét t''. Most $h''>h$ és így $t''<t$, úgy hogy

$$\frac{h''s''}{hs}=\frac{T+\sqrt{Tt}+t}{T+\sqrt{Tt''}+t''}>1,$$

mert $t>t''$. Most tehát

$$h''s''>hs,$$

azaz az alkohol fenéknyomása nagyobb a vízénél: az LL lap leesik.

c) Ezen kérdés eldöntésénél már nem a nyomást, hanem az e alsó nyílását elzáró T területű lapra felfelé nyomó erőt kell vizsgálnunk. Ennek nagysága megegyezik a T-vel mindenütt egyenlő keresztmetszetű vízoszlop súlyával, tehát nagyobb 1 kg súlyánál. Ezért az 1 kg súlyú ólomdarab nem nyomja le az LL lapot.

II. Ha az e edény alsó lapja t, a benne levő víz felszínének területe T (ez E-ben levő víz szintjével megegyező magasságban), akkor az

a) esetben leesik,

b) „ nem esik le,

c) „ leesik az LL lap.

Ugyanis az *a)* esetben a higany felszínének területe $T'<T$ és ezért

$$\frac{h's'}{hs}=\frac{T+\sqrt{Tt}+t}{T'+\sqrt{T't}+t}>1, \quad \text{azaz } h's'>hs.$$

[1] Nyomás jelenti a vízszintes felületegységre ható nyomó erőt.

A *b)* esetben, az alkohol felszínére nézve $T'' > T$ és így

$$\frac{h''s''}{hs} = \frac{T + \sqrt{Tt} + t}{T'' + \sqrt{Tt''} + t} < 1, \quad \text{vagyis } h''s'' < hs.$$

A *c)* esetben pedig a t alaplapra ható – a víztől származó – nyomóerő megegyezik a t-vel mindenütt egyenlő keresztmetszetű vízoszlop súlyával és ez kisebb 1 kg súlynál.

Tárgyalásunkban feltételeztük, hogy az LL lap súlytalan. Ha az LL lapnak is van súlya, ugyanezen eredményeket kapjuk; csakhogy ekkor a bevezetésben definiált h magasság nem az LL lapnak az E-ben levő víz színétől való távolságát fogja jelenteni, hanem egy ennél kisebb távolságot, aminthogy ezt általában is tapasztaljuk.

Jegyzet. A felsorolt megoldásokon kívül még számos oly dolgozat érkezett, mely nem volt figyelembe vehető, részben az indokolás hiányossága miatt, részben amiatt, hogy a nyomás és nyomóerő fogalmát nem különböztették meg.

Helyes azon megállapítás, hogyha a lefelé növekedő keresztmetszetű edénybe 1 kg higanyt öntünk 1 kg víz helyett, akkor a higanyoszlop magassága nem 13,6-szer kisebb, mint a vízé, hanem $(13{,}6 + k)$-szor kisebb, ahol $k > 0$. Ugyanis ha annyi higanyt öntenénk a szóbanforgó edénybe, hogy magassága az 1 kg vízoszlop magasságánál 13,6-szer kisebb, akkor ezen higanymennyiség térfogata több lenne, mint a víz térfogatának 1/13,6 része és így súlya nagyobb, mint 1 kg. Tehát 1 kg súlyú higanyoszlop magasságának kisebbnek kell lennie a vízoszlop magasságának 1/13,6 részénél.

Hasonlóan következtethetünk az olaj esetében is, továbbá a lefelé szűkülő edénynél.

2. feladat

10 mikrofarados sűrítőt 10 000 voltra feltöltünk. Mennyibe kerül a benne felhalmozott energia, ha a villamos művek a kilovattórát 35 fillérért árulják?

Megoldás. Jelölje W a sűrítő energiáját, E a töltését, V a potenciálját. Ismeretes, hogy

$$W = \frac{1}{2} EV.$$

Ha E-t coulombokkal, V-t voltokkal mérjük, akkor az energiát joule-okban kapjuk.

$E = CV$, ahol C a sűrítő kapacitása. Ha C-t faradokkal, V-t voltokkal mérjük, akkor E-t coulombokban kapjuk. Az adott esetben $C = 10 \cdot 10^{-6} = 10^{-5}$ farad, $V = 10^4$ volt; így

$$E = 10^{-5} \cdot 10^4 \text{ coulomb} = 10^{-1} \text{ coulomb.}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} \text{ coulomb} \times 10^4 \text{ volt} = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \text{ joule} = 500 \text{ joule.}$$

$$1 \text{ kilowattóra} = 1000 \text{ watt} \times 3600 \text{ sec} = 36 \cdot 10^5 \text{ joule.}$$

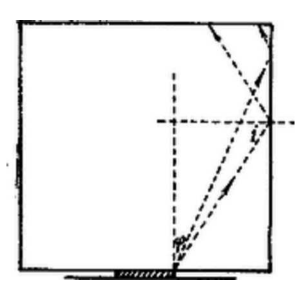
Eszerint $36 \cdot 10^5$ joule nagyságú energia ára 35 fillér; 500 joule ára

$$\frac{35 \cdot 500}{36 \cdot 10^5} \sim \frac{1}{200} \text{ fillér.}$$

Botár Liviusz és Tersztyánszky György (Premontrei gimn. VIII. o. Keszthely)

3. feladat

Vízszintes papirosra kis kerek foltot rajzolnak. A papirosra üvegkockát helyezünk úgy, hogy a foltot elfödje. Ha a foltot a kocka valamelyik oldallapján keresztül akarjuk nézni, nem látjuk. Ha azonban a foltra vizet cseppentünk és úgy helyezzük rá az üvegkockát, látjuk. Mi ennek a magyarázata? (Az üvegnek a levegőre vonatkozó törésmutatója 5/3, a vízé 4/3.)



Megoldás. 1^0. A foltról levegőrétegen keresztül az üvegkockába az alsó lapon lépnek be a sugarak és törést szenvednek. A törési szög nem lehet nagyobb a φ határszögnél, amelyre nézve

$$\sin\varphi = \frac{3}{5} = 0{,}6, \text{ tehát } \varphi < 45^0.^1$$

[1] $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} =: 0{,}707\ldots > 0{,}6.$

A φ szög alatt belépő sugarak az oldallaphoz

$$i = 90^\circ - \varphi > 45^\circ$$

szög alatt esnek be, tehát teljes visszaverődést szenvednek.

Ha a belépés szöge $< \varphi$, akkor az oldallaphoz való beesés szöge még inkább nagyobb 45°-nál, szóval minden sugár az oldallapon teljes visszaverődést szenved és ezért nem látjuk a foltot, ha az oldallapon nézünk keresztül.[2]

2^0. Az üvegnek a vízre vonatkozó törésmutatója: $n' = \frac{5}{3} : \frac{4}{3} - \frac{5}{4}$.
A vízből az üvegbe lépő sugarakra nézve a határszög φ_1 és most

$$\sin\varphi_1 = \frac{4}{5}, \quad \text{azaz} \quad \varphi_1 = 90^\circ - \varphi > 45^\circ.$$[3]

Ha tehát az alsó lapon a törési szög (az üvegbe lépés szöge) φ_1, akkor az oldallapra való beesés szöge

$$i_1 = 90^\circ - \varphi_1 = \varphi$$

és az ennek megfelelő kilépési szög a levegőbe 90°, az üvegkockából kilépő fénysugár az oldallapot súrolja. Az ilyen sugár még eljuthat a szemünkbe, tehát a foltot láthatjuk.

Azon sugarak, amelyek a kocka alsó lapjára φ_1-nél kisebb szög alatt lépnek be, azok a kocka oldallapjához φ-nél nagyobb szög alatt esnek; ezek már teljes visszaverődést szenvednek.

Jegyzet. A 2^0. alatt tárgyalt eset kedvezőbben alakul, azaz többféle sugár lép ki a kocka oldallapján ha

$$i_1 = 90^\circ - \varphi_1 < \varphi, \text{ azaz } \varphi_1 > 90^\circ - \varphi, \text{ tehát } \sin\varphi_1 > \cos\varphi.$$

Azonban $\quad \cos\varphi = \frac{4}{5} \quad$ és így $\quad \sin\varphi_1 > \frac{4}{5}$, ha $\quad n' < \frac{5}{4}$.

Ezen eset bekövetkezik akkor, ha az üvegnek a levegőre vonatkozó törésmutatója $< \frac{5}{3}$, azaz pl. koronaüveg esetében, melynek törésmutatója 1,53 – 1,63 körül van. Ha azonban az üvegkocka nehezebb flintüvegből van, melynek törésmutatója 1,7 vagy ennél nagyobb, akkor a 2^0. esetben sem látjuk a foltot.

---

[2] A kocka felső lapjához érkező sugarak beesési szöge = az alsó lapon való törési szöggel. Minthogy ez $< \varphi$, a sugarak kilépnek a levegőbe; a foltot felülről lehel látni. (Planparallel lemez!)

[3] Ugyanis $\sin^2\varphi + \sin^2\varphi_1 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$.