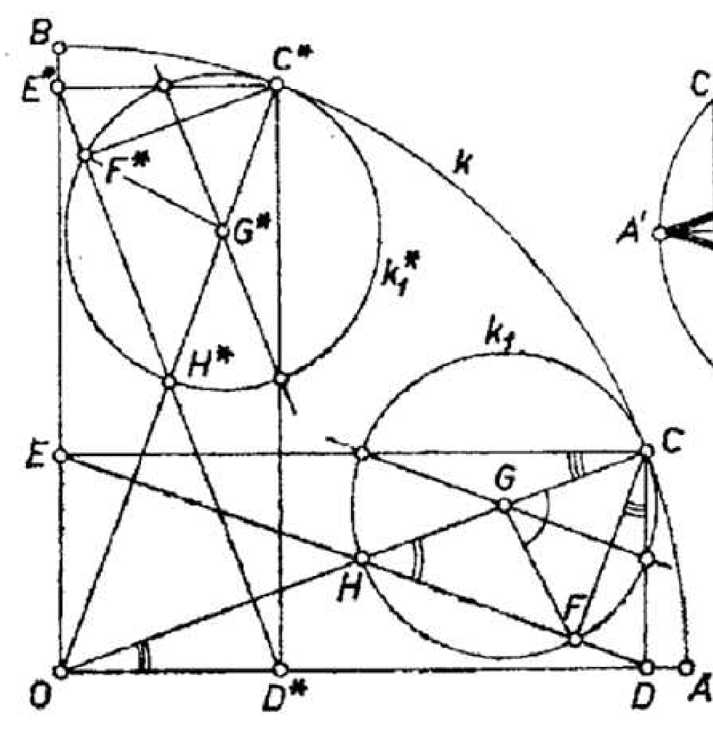
I. Legyen egyelőre $COA\sphericalangle < 45°$. A szerkesztés szerint $ODCE$ téglalap, $DE$ átlója $H$-ban felezi $OC$-t. Továbbá $CF$ felező merőlegese párhuzamos $DE$-vel, tehát $CH$-t is felezi, ezért a $G$ körüli $GC$ sugarú $k_1$ kör átmegy $H$-n, és sugara az eredeti kör sugarának $1/4$ része. Eszerint $CGF\sphericalangle = 2{\cdot}CHF\sphericalangle$. Mivel $DCF\sphericalangle = EDO\sphericalangle = COA\sphericalangle <= BOC\sphericalangle = DCH\sphericalangle$, azért $F$ a $DH$ szakaszon van, ezért $CHF\sphericalangle = CHD\sphericalangle = 2COA\sphericalangle$, tehát $CGF\sphericalangle = 4\cdot COA\sphericalangle$, vagyis $k_1$-ben a félkörnél kisebb $CF$ ívhez 4-szer akkora középponti szög tartozik, mint amekkora a $k$-ban az $AC$ ívhez tartozó középponti szög (1. ábra).

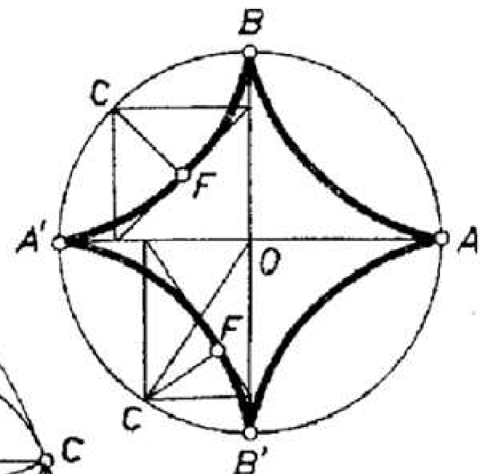
A körív hosszát a hozzá tartozó középponti szög radián egységben vett mértékszámának és a sugár mértékszámának szorzata adja, ezért

$$\widehat{CF} = CGF\sphericalangle \cdot \overline{GC} = \frac{CGF\sphericalangle}{4} \cdot 4\overline{GC} = COA\sphericalangle \cdot \overline{OC} = \widehat{AC},$$

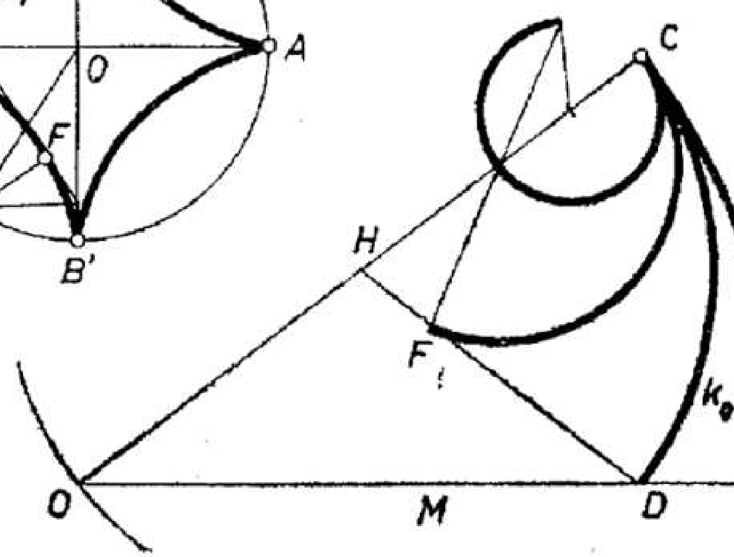
amint a feladat állítja. Másrészt $k_1$ kerülete negyedrész akkora, mint $k$ kerülete, tehát egyenlő $k$-nak $AB$ ívével, így $k_1$-nek $H$-t tartalmazó $CF$ íve egyenlő az $AB$ és $AC$ ívek különbségével, a $BC$ ívvel, vagyis az állítás másik része is helyes.




1. ábra




2. ábra




3. ábra

Amennyiben $45° < COA\sphericalangle < 90°$, az $A$, $B$ betűk felcserélésével (más szóval: az alakzatot tükrözve az $AOB\sphericalangle$ felezőjére) a fenti helyzet áll elő, a csere viszont az állítást nem érinti. $COA\sphericalangle = 45°$ esetén $F$ a $H$-ba esik, mindkét $CF$ ív félkör, másrészt $C$ felezi az $AB$ ívet, az állítás helyes.

II. $C$-nek a $k$-n vett (valamely további) tetszés szerinti helyzete a $BA'$, $A'B'$, $B'A$ ívek valamelyikére esik, ahol $A'$, $B'$ az $A$, $B$ tükörképe $O$-ra, vagy az $A$, $B$, $A'$, $B'$ pontok valamelyikébe. Az utóbbi esetekben $F$ egybeesik $C$-vel, a felező merőleges határozatlanná válik, de az állítás is érdektelen; minden más esetben pedig a szimmetria miatt nyilvánvalóan úgy helyes az állítás, ha az $AC$, $BC$ ív helyett a $k$ kör $C$-t tartalmazó negyedívének két rész-ívét mondjuk (2. ábra).

*Barcza Gyöngyi* (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o.)

*Megjegyzések.*

1. Az állítás kiadódik a következő tétel kétszeri alkalmazásával is: egy $O$ középpontú $k$ kör egy $OC$ sugara mint átmérő fölé ($H$ középponttal) $k_0$ kört írva és véve egy az $OC$-vel hegyesszöget bezáró $OM$ félegyenest, a $COM$ szög $k$-ból és $k_0$-ból egyenlő hosszú íveket tartalmaz: $\widehat{CA} = \widehat{CD}$, majd $O$, $k$ és $M$ helyén $H$-val, $k_0$-lal és $D$-vel $\widehat{CF} = \widehat{CD}$ (3. ábra).

*Papp Zoltán* (Debrecen, Kodály Z. zenei g. III. o. t.)

2. A bebizonyított állítást szemléletesen így értelmezhetjük. Illesszünk be egy $OA/4$ sugarú $k_1$ körlemezt $k$ belsejébe úgy, hogy egy $F$ pontjával érintse $k$-t $A$-ban, majd gördítsük $k_1$-et $k$ kerületének belső oldalán, $B$ felé indulva. Ennek során a $k$-ból és $k_1$-ből egymással páronként érintkezésbe jutott pontok mindig két egyenlő hosszú ívet töltenek ki, más kifejezéssel: a gördülés bármely helyzetéig a két körből egyenlő hosszú ívek fejtődnek le. A feladatban leírt szerkesztés az $F$ pont tetszés szerinti helyzetének megszerkesztését adja, ha adott a két kör pillanatnyi $C$ érintkezési pontja.

A gördülő kör pontjai által leírt pályák számos műszaki alkalmazásban fontosak, ezeket általában *cikloidák*nak nevezik, és ha a pálya egy kör belső oldala, akkor speciálisan *hipocikloidák*nak. Ilyet ír le példánkban $F$ is, és mivel egy körüljárás után visszaérkezik $A$-ba, a pálya záródik. Ennek a görbének egyedi nevet is adtak: *asztroida.*

*Králik István* (Budapest, Piarista g. III. o. t.)

3. Az $OF$ szakasz $OA$-ra és $OB$-re vett vetületét $x$-szel, ill. $y$-nal jelölve és $OA$-t 1-nek véve az 1366. feladatban[1] bebizonyított összefüggés szerint mindig fennáll $x^{2/3}+y^{2/3}=1$. Ez $F$ pályájának, az asztroidának az egyenlete.

[1] K. M. L. 31 (1965) 144. o.