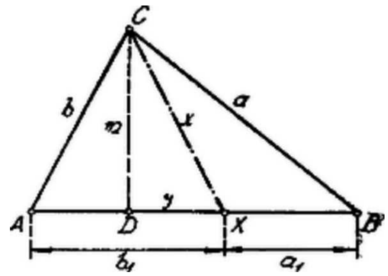
A Stewart[1]-tétel és alkalmazása.

Az ABC háromszögnek AB oldalán fekvő tetszőleges X pontot kössük össze a szembenfekvő C csúcsponttal, akkor a Pythagoras-tétel értelmében:

$$a^2 = m^2 + (a_1 + y)^2,$$
$$b^2 = m^2 + (b_1 - y)^2,$$
$$x^2 = m^2 + y^2.$$



E három egyenletből m és y kiküszöbölésével előállítunk egy egyenletet, amelyből x értéke kiszámítható. Evégből a harmadik egyenletből $m^2 = x^2 - y^2$ értékét az első és második egyenletbe helyettesítjük:

$$a^2 = x^2 + a_1^2 + 2a_1 y, \quad b^2 = x^2 + b_1^2 - 2b_1 y.$$

Szorozzuk meg az első egyenletet b_1-gyel, a másodikat a_1-gyel, ezután adjuk össze őket és vegyük figyelembe, hogy $a_1 + b_1 = c$, akkor kapjuk Stewart-tételét:

$$(x^2 + a_1 b_1)c = a^2 b_1 + b^2 a_1.$$

Szavakkal kifejezve: ha valamely háromszög egyik oldalának tetszőleges pontját összekötjük a szembenfekvő csúcsponttal, akkor az összekötő távolság négyzetéből és az oldal két szeletének szorzatából alkotott összeg szorozva az illető oldallal, egyenlő a második két oldal négyzetének összegével, mindegyik összeadandó szorozva az első oldalon fekvő nem szomszédos szelettel.[2]

Ezután alkalmazzuk a tételt néhány egyszerű esetben.

1. *A súlyvonal hossza.*

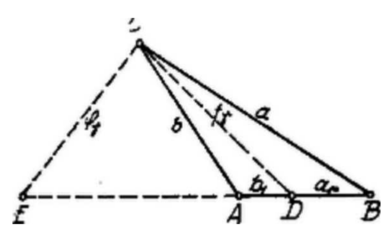
Ekkor az 1. ábrában $a_1 = b_1 = \dfrac{c}{2}$ és $x = s_c$, így Stewart tétele értelmében:

$$\left(s_c^2 + \frac{c^2}{4}\right) c = a^2 \frac{c}{2} + b^2 \frac{c}{2},$$

amiből

$$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

2. *A szögfelezők hossza.*



Ismeretes, hogy a belső szögfelező a szöggel szembenfekvő oldalt, a külső szögfelező pedig a szöggel szembenfekvő oldal meghosszabbítását a szöget befogó oldalak arányában osztja. Ebből a két arányból kapjuk:

$$\text{(I.)} \qquad AD = \frac{bc}{a+b}, \qquad BD = \frac{ac}{a+b}, EA = \frac{bc}{a-b}, \qquad EB = \frac{ac}{a-b} \ldots$$

[1] Matthew Stewart (olv. Sztyuört) (1717–1785) skót matematikus, akinek tétele „Some general theorems of considerable use in the higher parts of Mafhematics" c. munkájában, 1746-ban jelent meg.

[2] A tétel trigonometriai levezetését megtaláljuk Weber – Wellstein: Encyklopädie der Elementar–Mathematik II. k. 331. old.

Az ABC háromszögben a Stewart-tétel értelmében:

$$(CD^2 + AD \cdot BD) \cdot AB = AC^2 \cdot BD + BC^2 \cdot AD,$$

vagyis ha $CD = f_\gamma$, akkor I. figyelembevételével:

$$\left(f_\gamma^2 + \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{ac}{a+b}\right) c = b^2 \frac{ac}{a+b} + a^2 \frac{bc}{a+b};$$

ebből

(II.) $$(a+b)^2 f_\gamma^2 = ab\big[(a+b)^2 - c^2\big] \ldots$$

azaz

$$f_\gamma^2 = ab - abc\frac{c}{(a+b)^2}.$$

Más alakját kapjuk a szögfelező képletének, ha a Heron-féle jelöléseket alkalmazzuk. A II.-ből:

$$(a+b)^2 f_\gamma^2 = ab(a+b+c)(a+b-c).$$

Ebből a belső szögfelező hossza, ha $a+b+c = 2s$ és $a+b-c = 2(s-c)$-t helyettesítünk:

$$f_\gamma = \frac{2}{a+b}\sqrt{s(s-c)ab}.$$

Hasonlóképpen kapjuk a külső szögfelező hosszát. Evégből felírjuk az EBC háromszög AC szelőjére a Stewart-tételt:

$$(AC^2 + EA \cdot AB) \cdot EB = EC^2 \cdot AB + BC^2 \cdot EA,$$

vagyis, ha $EC = \varphi_\gamma$ és I.-re tekintettel vagyunk:

$$\left(b^2 + \frac{bc}{a-b}c\right)\frac{ac}{a-b} = \varphi_\gamma^2 c + a^2 \frac{bc}{a-b}.$$

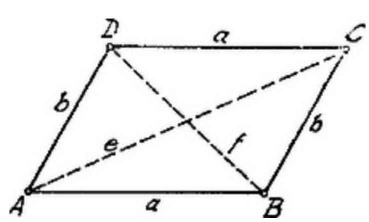
Ebből az előbbihez hasonló átalakítással:

$$\varphi_\gamma^2 = abc\frac{c}{(a-b)^2} - ab,$$

vagy

$$\varphi_\gamma = \frac{2}{a-b}\sqrt{(s-a)(s-b)ab}.$$

3. *Egy parallelogramma-tétel és megfordítása.*



Az ABD háromszögben a Stewart-tétel értelmében:

$$\left(\frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4}\right) f = a^2\frac{f}{2} + b^2\frac{f}{2},$$

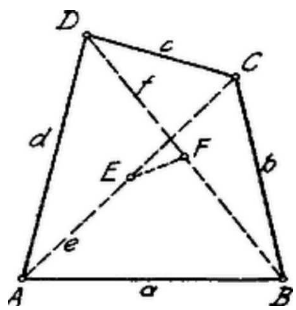
ahol e és f az átlókat jelentik.

Ebből 4-gyel szorzás és az f tényezővel való osztás után keletkezik:

$$2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2.$$

Tehát minden parallelogrammában az oldalak négyzetének összege egyenlő az átlók négyzetének összegével.

A tétel meg is fordítható: ha egy négyszögben az oldalak négyzetének összege egyenlő az átlók négyzetének összegével, akkor a négyszög parallelogramma.



A megfordítást úgy igazoljuk, hogy az adott $ABCD$ négyszögben az átlók E, F felezőpontjainak egymástól való EF távolságát számítjuk ki. A Stewart-tételt három háromszögre alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}
ABC\Delta:&\quad \left(EB^2+\frac{e^2}{4}\right)e=a^2\frac{e}{2}+b^2\frac{e}{2},\\
ACD\Delta:&\quad \left(ED^2+\frac{e^2}{4}\right)e=c^2\frac{e}{2}+d^2\frac{e}{2},\\
BED\Delta:&\quad \left(EF^2+\frac{f^2}{4}\right)f=EB^2\frac{f}{2}+ED^2\frac{f}{2}.
\end{aligned}$$

A törtek eltávolítása és egyszerűsítés után lesz:

$$\begin{aligned}
&4\cdot EB^2+e^2=2a^2+2b^2,\\
&4\cdot ED^2+e^2=2c^2+2d^2,\\
&8\cdot EF^2+2f^2=4\cdot EB^2+4\cdot ED^2.
\end{aligned}$$

E három egyenlet megfelelő tagjait összeadjuk:

$$8\cdot EF^2+2e^2+2f^2=2a^2+2b^2+2c^2+2d^2,$$

ill.

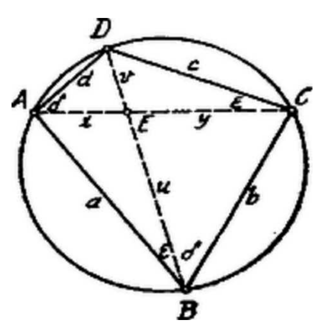
(III.) $$4\cdot EF^2+e^2+f^2=a^2+b^2+c^2+d^2\ldots$$

Ámde a feltétel értelmében

$$e^2+f^2=a^2+b^2+c^2+d^2,$$

így III.-ból $EF=0$, de akkor a két felezőpont egybeesik. Azonban az olyan négyszög, amelynek átlói felezik egymást, parallelogramma, ennélfogva $ABCD$ parallelogramma.

4. *A Ptolemäus-tétel bizonyítása.*



Jelöljük $ABCD$ húrnégyszög átlóit: $AC=x+y=e$ és $BD=u+v=f$, akkor $ABC\Delta$-ben a Stewart-tétel értelmében:

(IV.) $$(u^2+xy)e=a^2y+b^2x\ldots$$

Azonban:

$$\begin{aligned}
ABE\Delta\sim DCE\Delta:&\quad xy=uv,\quad ay=uc;\\
ADE\Delta\sim BCE\Delta:&\quad bx=du.
\end{aligned}$$

Ezeket figyelembe véve IV.-ből lesz:

$$(u^2 + uv)e = auc + bdu.$$

Osszunk u-val és helyettesítsünk $u + v = f$, akkor megkapjuk a Ptolemäus-tételt:

$$ef = ac + bd.$$

A Ptolemäus tételnek ez a levezetése főleg azért előnyös, mert egyetlen egy segédvonalat sem kell megrajzolnunk.[3]

dr. Kresznerics Károly
Budapest

[3]A Stewart-tétel sok alkalmazását találjuk M. C. Thiry: Applications remarquables du Théoréme de Stewart el Théorie du Barycentre 1891, továbbá a „Bulletin de mathématiques élémentaires” 1895–96. évf. (113–118. old.) és 1903-4. évf. (50. old.).