1. Jelentsen K az alábbiakban egy csúcspontnélküli zárt konvex síkgörbét. Tekintsük a K-ba írható legnagyobb területű háromszöget.[1] Ez a háromszög legjobban közelíti meg K területét oly értelemben, hogy az eltérés K és a háromszög területe között erre a legkisebb az összes K-ba írható háromszögek közül.

Kérdés mármost, hogy ez a legjobban approximáló – vagy mint mondani szokás extrém – háromszög milyen tulajdonsággal bír?

Nem egyszerű feladat mindazon tulajdonságot megadni, amelyek egyértelműen meghatározzák a háromszöget; másszóval: megadni a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy valamely K-ba írt háromszög maximális területű legyen. Könnyű ezzel szemben erre egy igen jellemző, de pusztán szükséges feltételt találni, amelyet általánosabb alakban adunk meg:

A K-ba írható legnagyobb területű n-szög bármely csúcspontjában a K-hoz húzott érintő párhuzamos a két szomszédos csúcsponton át fektetett szelővel.

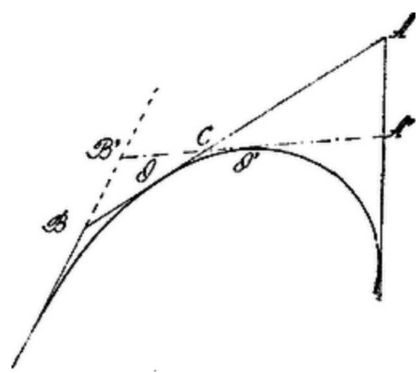
Tegyük fel u. i., hogy valamely K-ba írt n-szög nem bír ezzel a tulajdonsággal. Hagyjuk ekkor változatlanul az n-szög $n-1$ csúcspontját, az n-ediket azonban hozzuk a fent megjelölt helyzetbe. A sokszög területe ezzel nyílván növekedett.

Az alábbiakban hasonlóan fogunk eljárni. Jellemezni fogjuk az extrém sokszöget bizonyos tulajdonsággal. Nem vizsgáljuk azonban, hogy valamely polygon, mely ilyen tulajdonsággal bír, vajon extrém sokszög-e?

2. *A K köré írható legkisebb területű n-szög minden oldalát a K-val való érintési pontja felezi.*

Ennek, valamint az ezt követő tételnek a bizonyításánál felhasználunk egy, az analízisben gyakran szereplő segédtételt:

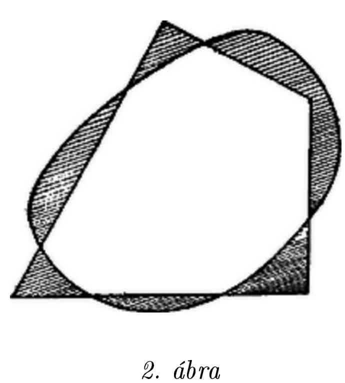
Legyenek $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ x_0 környezetében folytonos függvények. Ha most $\varphi(x)_0 < \psi(x_0)$, akkor megadható egy pozitív h szám, úgy, hogy $\varphi(x) < \psi(x)$, valahányszor $|x - x_0| < h$.



1. ábra

Vegyünk ezután tekintetbe egy polygont, melynek egyik AB oldalát az O érintési pont nem felezi: $\overline{AO} > \overline{OB}$. (1. ábra.) Válasszunk AO-on egy C pontot O-hoz oly közel, hogy $AC > CB$. A C-ből húzott érintőnek a szomszédos oldallal ill. annak meghosszabbításával való metszéspontja legyen A' ill. B'. Mivel $\overline{A'C}$ ill. $\overline{CB'}$ az $\overline{OC}$ távolsággal folytonosan változik, választhatjuk segédtételünk alapján C-t úgy, hogy $\overline{A'C} > \overline{CB'}$ legyen. Ekkor azonban területüket illetőleg: $CBB'\,\Delta < CAA'\,\Delta$.

Ha tehát AB-t a többi oldal érintési pontjainak változatlanul hagyása mellett $A'B'$-vel helyettesítjük, akkor az így előálló sokszög területe az eredetivel szemben csökken. U. i. az új sokszög területéből $CAA'\,\Delta$ kiesik, ellenben hozzájárul a $CBB'\,\Delta$; a kiesés nagyobb, mint a növekedés.



2. ábra

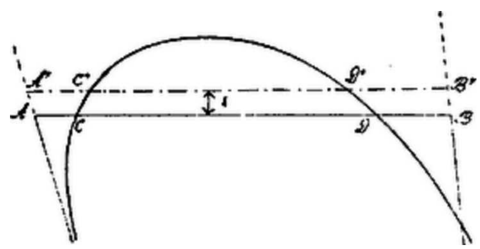
[1]A szélső érték exisztenciája ebben az esetben – valamint a következőkben – Weierstrassnak egy nevezetes tételéből folyik.

3. 1.-ben a K-ba, 2.-ben a K köré írt n-szögek közül vizsgáltuk azt, melyre a polygon és K közt lévő terület minimális. Most a polygonra semmi kikötést nem téve, fogjuk jellemezni azt az n-szöget, melyre ez a „területi eltérés" (2. ábrán a vonalkázott síkrész területe) a lehető legkisebb.

A K-t terület szempontjából legjobban megközelítő n-szög minden oldalát saját felezőpontja és K-val való két metszéspontja négy egyenlő részre osztja.

Könnyen belátható, hogy az extrém polygon K-t, tételünknek megfelelően, valóban kétszer metszi. Tegyük tel pl., hogy valamelyik oldal teljes egészében K-n kívül van. Ezt az oldalt a vele párhuzamos érintővel helyettesítve, az eltérés csökken. Hasonlóan csökkenthető az eltérés, ha valamely oldal végpontjaival együtt K belsejében van. Nézzük most azt az esetet, amidőn valamely oldal egyik végpontja K-n kívül, a másik K-n belül van. Forgassuk el ezt az oldalt K-val való metszéspontja körül addig, amíg a belső végpont K-ra nem ér. Az eltérés ezáltal ismét csökkent.

Az az eset azonban, melynél valamely oldal K-t érinti, vagy végpontja K-n van, határesete annak, amelynél két metszéspont van. Erre (lényegtelen módosítással) az alábbi bizonyítást alkalmazhatjuk.



3. ábra

Legyen tehát AB valamely n-szög egyik oldala, melyre – feltevésünkkel ellentétben – pl. $\overline{AC}+\overline{DB}<\overline{CD}$, hol C és D AB-nek K-val való metszéspontjai. (3. ábra.) Toljuk el ekkor AB-t magával párhuzamosan h távolsággal $A'B'$-be. Az új metszéspontok legyenek C', ill. D'. Mivel $\overline{A'C'}$, $\overline{C'D'}$, valamint $\overline{D'B'}$ h-nak folytonos függvénye, választhatom h-t úgy, hogy $h>0$, és $\overline{A'C'}+\overline{D'B'}<\overline{C'D'}$. Ezért:

$$\overline{AC}+\overline{DB}+\overline{A'C'}+\overline{D'B'}<\overline{CD}+\overline{C'D'}$$

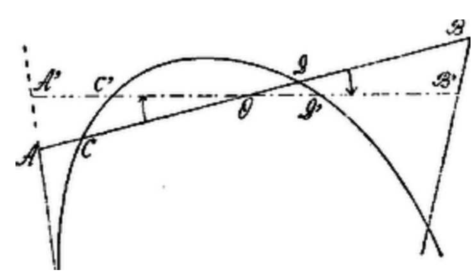
tehát

$$\frac{\overline{AC}+\overline{A'C'}}{2}\,h+\frac{\overline{DB}+\overline{D'B'}}{2}\,h<\frac{\overline{CD}+\overline{C'D'}}{2}\,h.$$

Ha most az egyenesvonalú trapézek helyett a megfelelő vegyes vonalú trapézek területét vesszük, még inkább áll:

$$ACA'C'+DBB'D'<CDD'C'.$$

Az eltolást alkalmas irányban végezve $ACA'C'+DBB'D'$ a területi eltérés növekedését, $CDD'C'$ a csökkenését jelenti. Ha tehát $\overline{AC}+\overline{DB}\neq\overline{CD}$, akkor az eltérés csökkenthető.



4. ábra

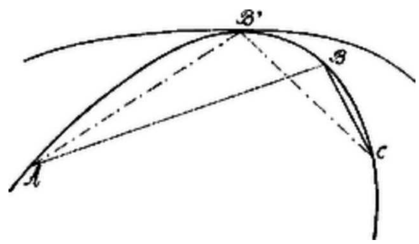
Tegyük fel mármost, hogy $\overline{AC}+\overline{DB}=\overline{CD}$, de – a feltétellel ugyancsak ellentétben – pl. $\overline{AC}<\overline{DB}$ (4. ábra.). Az eltérést ebben az esetben AB-nek alkalmasan választott O pontja körüli elforgatásával kisebbíthetjük. Válasszuk O-t AB-n úgy, hogy $OA'A\,\Delta=OB'B\,\Delta$. A K görbe és a polygon közötti eltérés ezáltal egyrészt növekszik, másrészt csökken. Az elforgatást az ábrán megjelölt irányban végezve, a növekedés: $ODD'+ACA'C'$; a csökkenés: $OC'C+DB'BD$. $A'B'$-nek AB-hez elég közel való választásával az O pont tetszésszerinti közel juthat AB felezési pontjához. Választhatjuk tehát O-t úgy, hogy $OD<OC$, sőt – ismét a folytonosságra hivatkozva – úgy, hogy $ODD'<OC'C$. Ekkor azonban:

$$C'A'AC+ODD'<D'B'BD+OCC'$$

ami éppen az eltérés kisebbedését jelenti. Az $\overline{AC}+\overline{DB}=\overline{CD}$ és $\overline{AC}=\overline{DB}$ feltételek viszont a tételben kimondott feltétellel ekvivalensek.

4. Nézzük ezután a kerület szempontjából legjobban approximáló polygonokat.

A K-ba írt legnagyobb kerületű n-szög bármelyik két szomszédos oldala közül egyik a másikának a szögpontjukban K-hoz húzott érintőre vonatkozó tükörképe.



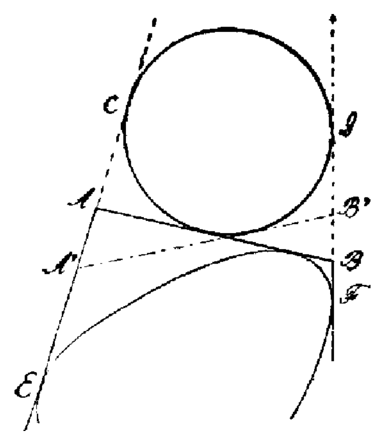
5. ábra

Legyen u. i. A, B, C rendre valamely n-szög három egymásután következő csúcspontja. (5. ábra.) Vegyük tekintetbe azt az ellipszist, melynek fókuszai A és C, és amely K-t az $\widehat{AC}$ íven érinti. Legyen az érintési pont B'. AB' és $B'C$ egymással (az ellipszisre vonatkozó ismert tétel alapján) a fent megjelölt viszonyban vannak. Feltéve, hogy B nincs valamely érintési pontban (amikor is B az ellipszis belső pontja):

$$AB+BC<AB'+B'C,$$

amivel állításunkat igazoltuk.

5. Foglalkozzunk végül a *K köré írható legkisebb kerületű n-szöggel. Rajzoljuk meg az n-szög bármely oldalához azt az érintőkört, mely K-n kívül fekszik és amely egyúttal a két szomszédos oldal meghosszabbítását is érinti. Az extrém polygonnál ez a kör K-t érinti.*



6. ábra

Világos mindenekelőtt, hogy az extrém polygon minden oldala érinti K-t. Ha azonban feltételünk valamely P polygonra nincs kielégítve, akkor könnyen szerkeszthető P-vel egyenlő kerületű polygon, melynek viszont nem minden oldala érinti K-t, jelöljük a tételben szereplő körnek az AB oldallal szomszédos oldalak meghosszabbításával való érintési pontjait C ill. D-vel (6. ábra). Ezen oldalak K-val való E és F érintési pontjait változatlanul hagyva, helyettesítjük AB-t a körnek oly $A'B'$ érintőjével, mely K-t nem érinti. Nyilvánvaló, hogy ezáltal a polygon kerülete nem változott, mert

$$\overline{EA}+\overline{AB}+\overline{BF}=\overline{EA'}+\overline{A'B'}+\overline{B'F};$$

u. i. az egyenlőség mindkét oldala $=\overline{EC}+\overline{DF}$.

Ismételjük, hogy az itt tárgyalt feltételek nem elegendők az extrém polygonok meghatározására. Érdekes probléma azonban annak eldöntése, hogy e feltételek milyen speciális esetben definiálják egyértelműen az extrém sokszöget és hogy ebben az esetben az „eltérést” a bizonyításban leírt módon állandóan csökkentve, az így előálló polygonsorozat konvergál-e? Ezáltal lehetséges volna u. i. az extrém polygont tetszés szerinti pontossággal megszerkeszteni.

Budapest, 1936.

Fejes László
IV. é. bölcsészhallgató