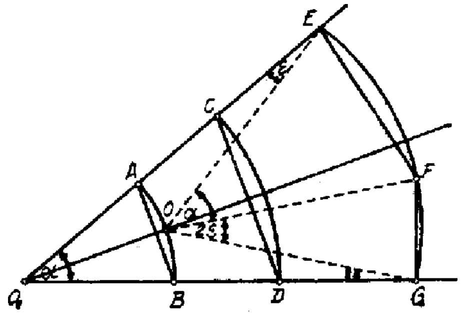
A Winkler-féle szögharmadolási módszerről.[1]

I. Szögtávolságok összefüggése.

1°. *Szögtávolságnak* fogjuk nevezni egy szög szárai közé húzott körív húrját. Minden szögtávolság merőleges a szög felezőjére.



1. ábra

Rajzoljunk a tetszőleges α szög O_1 csúcsából a szárak közé a sugárral $\widehat{AB}$ ívet (l. 1. ábra), majd a $b \geq \dfrac{\overline{AB}}{2}$ sugárral $\widehat{CD}$ ívet. Ezek után az $\widehat{AB}$ ív 0 felezőpontjából ugyancsak b sugárral meghúzzuk az α szög szárai közé az $\widehat{EG}$ ívet. Erre az ívre az előbbi $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szögtávolságok egymásután pontosan rámérhetők: $\overline{EF} = \overline{CD}$ és $\overline{FG} = \overline{AB}$.

Ugyanis, ha $\overline{O_1A} = a$ és $\overline{O_1C} = \overline{OE} = b$, akkor

$$\overline{AB} = 2a \sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{és} \quad \overline{CD} = 2b \sin\frac{\alpha}{2} \ldots \tag{1}$$

Legyen $O_1EO\sphericalangle = O_1GO\sphericalangle = \varepsilon$, akkor az O_1EOG deltoid O-nál levő szöge: $360° - (\alpha + 2\varepsilon)$ és így $EOG\sphericalangle = \alpha + 2\varepsilon$. Jelöljük F-fel az $\widehat{EG}$ ív azon pontját, melyre

$$EF = CD = 2b \sin\frac{\alpha}{2} \ldots \tag{1a}$$

ekkor $EOF\,\Delta \overset{\infty}{=} CO_1D\,\Delta$ és így $EOF\sphericalangle = \alpha$, miért is $FOG\sphericalangle = 2\varepsilon$ és így:

$$FG = 2b \sin\varepsilon \ldots \tag{1b}$$

Ámde az $OEO_1\,\Delta$-ből a sinustélellel:

$$a : b = \sin\varepsilon : \sin\frac{\alpha}{2}; \quad \text{innen} \quad \sin\varepsilon = \frac{a}{b}\sin\frac{\alpha}{2}$$

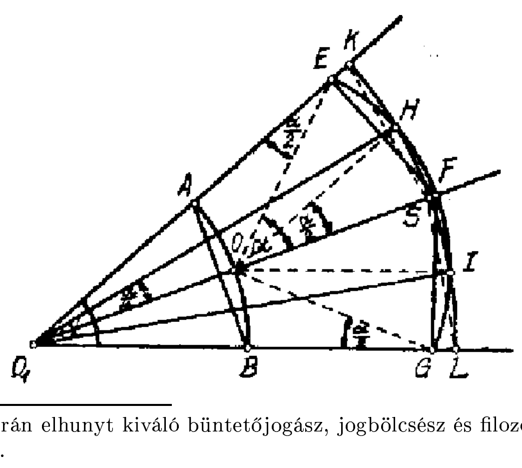
és $1b$)-ből:

$$FG = 2a \sin\frac{\alpha}{2} = AB \ldots . \tag{1c}$$

Q. e. d

2°. Ha $b = a$ (l. 2. ábra), akkor a $\widehat{CD}$ ív egybeesik $\widehat{AB}$-vel és így az $\widehat{EG}$ ívre az $\overline{AB}$ szögtávolság most pontosan kétszer mérhető föl: $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{AB}$.

Osszuk az $\widehat{EG}$ ívet a H, F, I pontokkal négy egyenlő részre. Az $\overline{O_1H} = \overline{O_1I}$ sugárral húzott $\widehat{KL}$ ívre az $\overline{AB}$ szögtávolság szintén kétszer mérhető föl: $\overline{KS} = \overline{SL} = \overline{AB}$.



2. ábra

[1] Dr. Winkler Béla (1900–1935.) korán elhunyt kiváló büntetőjogász, jogbölcsész és filozófus szakíró, aki matematikával és természettudományokkal is behatóan foglalkozott.

Ugyanis most

$$\overline{AB} = \overline{EF} = \overline{FG} = 2a \sin \frac{\alpha}{2}, \ldots \tag{2}$$

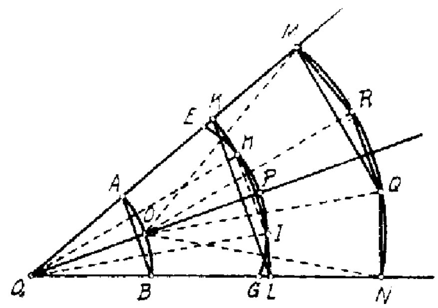
és a HOO_1 egyenlőszárú háromszögből, mivel $\overline{O_1O} = \overline{OH} = a$ és $HO_1O\sphericalangle = O_1HO\sphericalangle = \frac{\alpha}{4}$, azért

$$\overline{O_1H} = 2a \cos \frac{\alpha}{4} = \overline{O_1I} = \overline{O_1K} = \overline{O_1L} \ldots \tag{2a}$$

Most már

$$\overline{KS} = \overline{SL} = 2\overline{O_1K} \cdot \sin \frac{\alpha}{4} = 4a \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} = 2a \sin \frac{\alpha}{2} = \overline{AB}. \tag{2b}$$

Q. e. d



3. ábra

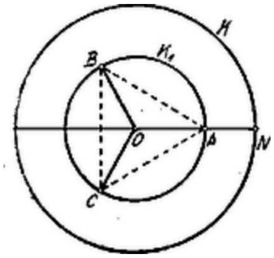
3°. Az $\widehat{AB}$ ív O felezőpontjából (l. 3. ábra) most az előbbi $\overline{O_1K} = \overline{O_1L}$ sugárral húzzunk az α szög szárai közé $\widehat{MN}$ ívet. Erre az 1°. pont szerint a $\overline{KL}$ és $\overline{AB}$ szögtávolságok egymásután pontosan felmérhetők. $\overline{MQ} = \overline{KL}$ és $\overline{QN} = \overline{AB}$. Viszont az $\widehat{MQ} = \widehat{KL}$ ívre az $\overline{AB}$ szögtávolság kétszer mérhető rá: $\overline{MR} = \overline{RQ} = \overline{AB}$ és így az $\widehat{MN}$ ívre végül is háromszor mérhető föl $\overline{AB}$. Az $MON\sphericalangle$-et az OR, OQ sugarak ilyenformán 3 egyenlő részre osztják, de az eredeti $MO_1N\sphericalangle = \alpha$ szöget az O_1R, O_1Q sugarak nem.

II. Az egyenes szög (180°) harmadolása.

4°. Legyen adva egy k kör O középponttal (l. 4. ábra). Szerkesszük meg a vele koncentrikus k_1 kört úgy, hogy a k_1 körbe írható szabályos húrháromszög oldala az eredetileg megadott k kör sugarával legyen egyenlő:

$$\overline{AB} = \overline{ON} = r.$$

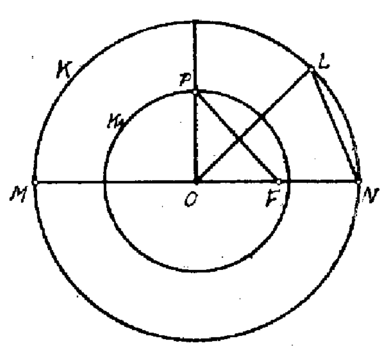
$$\overline{AB} = \overline{OA}\sqrt{3}, \quad \text{azért} \quad r = r_1\sqrt{3}, \quad \text{ill.} \quad r_1 = \frac{r}{\sqrt{3}} \ldots \tag{3}$$



4. ábra

A k_1 kör pontosan is megszerkeszthető, mi azonban egy közelítő szerkesztést fogunk alkalmazni, mely azután bármely szög harmadolásánál is felhasználhatónak fog bizonyulni.

Vegyük körzőbe a k körbe írt szabályos nyolcszög $\overline{NL}$ oldalát (l. 5. ábra) és az $\overline{ON}$ sugár F felezőpontjából e körzőnyílással messük el a rá merőleges sugarat. Az így kapott P pont a keresett k_1 kör kerületén van. E módszer azonban nem pontos, hanem a k_1-nél kissé nagyobb sugarú kört ad.



5. ábra

T. i.:

$$\overline{NL} = a_8 = 2r\sin 22°30' = 2r\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = 2r\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = r\sqrt{2-\sqrt{2}} = \overline{PF}\ldots \tag{4}$$

és így

$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{PF}^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{r^2\left(2-\sqrt{2}\right) - \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{\frac{7}{4}-\sqrt{2}}\ldots \tag{4a}$$

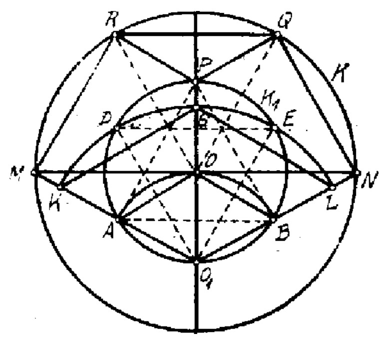
Az $\overline{OP} \approx r_1$ állítás tehát egyértelmű azzal az állítással, hogy

$$\frac{7}{4}-\sqrt{2} \approx \frac{1}{3}, \quad \text{azaz} \quad \sqrt{2} \approx \frac{7}{4}-\frac{1}{3} = \frac{17}{12} = 1{,}416\ldots \tag{4b}$$

ami a $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ értékhez képest 0,0024-nyi hibát jelent (0,17%-os hiba). Végül is

$$\overline{OP} = r_1 \cdot 1{,}00346\ldots \tag{4c}$$

vagyis szerkesztésünk valóban a k_1-nél kissé nagyobb sugarú kört ad.



6. ábra

5°. Húzzuk meg most már (l. 6. ábra) a k kör $\overline{MN}$ átmérőjét, valamint a k_1 körnek erre merőleges $\overline{O_1P}$ átmérőjét és a k_1 körbe írt szabályos ABP, O_1DE háromszögek többi oldalait. Mivel $\overline{MO} = \overline{AB} = \overline{ON}$ és $MO \parallel AB \parallel ON$, azért az $ABOM$, $ABNO$ négyszögek parallelogrammák. Továbbá, mint a k_1 körbe írt szabályos hatszög oldalai: $\overline{AO_1} = \overline{O_1B} = \overline{BO} = \overline{OA}$ és így az AO_1BO négyszög rombusz, melyben $AO_1B\sphericalangle = AOB\sphericalangle = 120°$. A 180°-os $MON\sphericalangle$ és a 120°-os $MO_1N\sphericalangle$ ugyanolyan viszonyban vannak, mint a 3. ábrabeli $MON\sphericalangle$ és $MO_1N\sphericalangle$. Utóbbi szög szárai közé itt is húzzuk meg O_1 középpontból az O ponton átmenő $\widehat{AB}$ ívet és a D, E pontokon átmenő $\widehat{KL}$ ívet. Ha a K kör sugara: r, akkor az I. rész fejtegetései szerint az egyes ívekre a köv. szögtávolságok mérhetők föl:

$$\text{az } \widehat{AB} \text{ ívre: } \overline{AB} = r,$$
$$\text{a } k_1 \text{ kör } \widehat{APB} \text{ ívére: } \overline{AP} + \overline{PB} = 2r,$$
$$\text{a } \widehat{KL} \text{ ívre: } \overline{KG} + \overline{GL} = 2r,$$
$$\text{és a } k \text{ kör } \widehat{MN} \text{ ívére: } \overline{MR} + \overline{RQ} + \overline{QN} = 3r.$$

Az MN ívet harmadoló R, Q pontok O-val együtt szabályos háromszöget alkotnak, mely az $O_1DE\,\Delta$-ből keletkezik, ha ezt az $\overrightarrow{O_1O}$ *translation*ak vetjük alá. Ennélfogva az $ORQ\,\Delta$ középpontja a P pont és így $\overline{OP} = \overline{PR} = \overline{PQ}$. (Megjegyzendő, hogy ez a 3. ábrabeli $ORQ\,\Delta$-re is vonatkozik, mely az $O_1HI\,\Delta$ translatiójából keletkezik és így ott is $\overline{OP} = \overline{PR} = \overline{PQ}$).

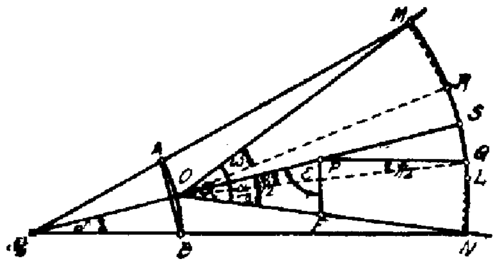
Ezek figyelembevételével a 180°-os $MON\sphericalangle$ harmadolására, vagyis az R, Q pontok megszerkesztésére két eljárást is nyertünk: az $MON\sphericalangle$ szárai közé meghúzzuk a k kör $\widehat{MN}$ ívét, majd az $MON\sphericalangle$ felezőjén a 4°. pontban ismertetett módszerrel megkeressük a k_1 kört megadó P pontot.

Ezek után az egyik eljárás abban áll, hogy az O ponton túl meghosszabbított szögfelezőre rámérjük az $\overline{O_1O} = \overline{OP}$ távolságot és az $MO_1N\sphericalangle$ szárai közé $\overline{O_1O}$ sugárral az $\widehat{AB}$ ívet rajzoljuk. Ekkor az $\overline{AB}$ szögtávolság éppen háromszor mérhető rá az $\widehat{MN}$ ívre: $\overline{MR} = \overline{RQ} = \overline{QN} = \overline{AB}$.

A másik eljárás a következő: P pontba beszúrva a körzőt, $\overline{OP}$ sugárral elmetsszük az $\widehat{MN}$ ívet: így éppen az R, Q pontokat kapjuk.

III. A szögharmadolás három módszere.

6°. A 180°-os szög harmadolásának iménti végrehajtása kiterjeszthető minden más szögre is. Így a szögharmadolás három módszerét kapjuk.



7. ábra

Az első módszer szerint (l. 7. ábra) az α szög szárai közé húzott $\widehat{MN}$ ívet négy egyenlő részre osztjuk, azután az $\overline{NL}$, negyedívtávolságot körzőbe vesszük és az $\overline{ON}$ sugár F felezőpontjából e körzőnyílással elmetsszük a szögfelezőt P pontban (a két metszéspont közül az $\widehat{MN}$ ívhez közelebb fekvőt vesszük). Meghosszabbítva O ponton túl a szögfelezőt és rámérve az $\overline{O_1O} = \overline{OP}$ távolságot, az $MO_1N\sphericalangle$ szárai közé most is meghúzzuk $\overline{O_1O}$ sugárral az $\widehat{AB}$ ívet. Az $\overline{AB}$ szögtávolság az $\widehat{MN}$ ívre háromszor mérhető föl: $\overline{MR} = \overline{RQ} = \overline{QN} = \overline{AB}$. Az $MOR\sphericalangle = \omega$ szög tehát közelítőleg $\dfrac{\alpha}{3}$-mal egyenlő. (Ez a szerkesztés mintegy megfordítottja a 3. ábrán látható szerkesztésnek és annak pontossága itt csak azért tűnik el, mert az $\overline{O_1O}$ távolság itt adott megszerkesztése nem pontos, mint ahogy ez a távolság körzővel és vonalzóval pontosan nem is szerkeszthető meg.)

Egyszerűség kedvéért legyen $\overline{OM} = \overline{ON} = 1$, tehát $\overline{OF} = \dfrac{1}{2}$. A negyedívtávolság:

(5) $$\overline{NL} = 2\sin\frac{\alpha}{8} = FP\ldots$$

Legyen $OPF\sphericalangle = \varepsilon$, ekkor az OFP Δ-ben a sinustétellel:

(5a) $$\sin\varepsilon : \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} : 2\sin\frac{\alpha}{8}; \quad \text{innen} \quad \sin\varepsilon = \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{4\sin\dfrac{\alpha}{8}}\ldots$$

Mivel pedig

(5b) $$\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4} = 4\sin\frac{\alpha}{8}\cos\frac{\alpha}{8}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots$$

azért 5a)-ból:

(5c) $$\sin\varepsilon = \cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\ldots$$

Ezekután

(5d) $$\overline{OP} : \overline{FP} = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \varepsilon\right) : \sin\frac{\alpha}{2}\ldots$$

(A P pont másik lehetséges helyzetében ε helyett $180^\circ - \varepsilon$ volna írandó). Most már az 5d)-ből, figyelembevéve FP-nek 5) alatti értékét és az 5a) összefüggést:

$$\overline{OP} = \frac{2\sin\dfrac{\alpha}{8}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\varepsilon\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\varepsilon\right)}{2\sin\varepsilon} = \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\varepsilon + \cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\varepsilon}{2\sin\varepsilon},$$

ill. 5b) és 5c) alapján:

(5e) $$\overline{OP} = \frac{4\sin\dfrac{\alpha}{8}\cos\dfrac{\alpha}{8}\cos\dfrac{\alpha}{4}\cos\varepsilon + \cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\alpha}{8}}{2\cos\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\alpha}{8}} = 2\sin\frac{\alpha}{8}\cos\varepsilon + \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\ldots$$

Tisztán az α-val kifejezve pedig:

(6) $$\overline{OP} = 2\sin\frac{\alpha}{8}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}} + \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \overline{O_1O} = \overline{O_1A} = \overline{O_1B}\ldots$$

Az $OO_1N\,\Delta$-ből a cosinustétellel:

$$\begin{aligned}\overline{O_1N}^2 = \overline{O_1O}^2 + 1 - 2\overline{O_1O}\cdot\cos\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 4\sin^2\frac{\alpha}{8}\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}\right) + \\ + 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{8}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \\ + 1 + 4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{8}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = \\ = 4\sin^2\frac{\alpha}{8} - \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + 6\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{8}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}} + \\ + \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha}{2} + 1 + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \frac{1}{4}\cos\alpha + \cos^2\frac{\alpha}{2} + \\ + 4\sin^2\frac{\alpha}{8} + 6\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{8}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}}\ldots\end{aligned} \tag{6a}$$

Most már az $MO_1O\sphericalangle = OO_1N\sphericalangle = \delta$ szög kiszámítható a sinustétellel:

$$\sin\delta : \sin\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 1 : O_1N, \quad \text{tehát} \quad \sin\delta = \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\overline{O_1N}}\ldots \tag{6b}$$

Az $\overline{AB}$ szögtávolság:

$$\overline{AB} = 2\overline{O_1A}\cdot\sin\delta = 2\frac{\overline{O_1O}}{\overline{O_1N}}\sin\frac{\alpha}{2} = \overline{MR}\ldots \tag{6c}$$

A keresett $MOR\sphericalangle = \omega$ szögre tehát felírhatjuk, hogy

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\overline{MR}}{2\overline{OM}} = \frac{\overline{MR}}{2} = \frac{\overline{O_1O}\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\overline{O_1N}}\ldots, \tag{6d}$$

ill. 6) és $6a$) alapján:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{8}\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\alpha}{4}\cos^2\dfrac{\alpha}{8}} + \dfrac{1}{4}\sin\alpha}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\cos\alpha + \cos^2\dfrac{\alpha}{2} + 4\sin^2\dfrac{\alpha}{8} + 6\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{8}\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\alpha}{4}\cos^2\dfrac{\alpha}{8}}}}. \tag{7}$$

E képlet az $\omega \approx \dfrac{\alpha}{3}$ szöget, mint α függvényét szolgáltatja. Értéktáblázatából (l. alább) kiderül, hogy e szerkesztéssel csak az első 3 negyed-beli szögek közelítő harmadolása végezhető el, a 4-ik negyedben már igen nagy az eltérés.

Minthogy $\alpha = 210^\circ$-nál $\omega > \dfrac{\alpha}{3}$, de már $\alpha = 240^\circ$-nál $\omega < \dfrac{\alpha}{3}$, azért kell lennie egy olyan $210^\circ < x < 240^\circ$ értéknek, melyre $\omega = \dfrac{x}{3}$. Az x szög közelítő értéke *lineáris interpolációval* meg is állapítható. Az $\omega = f(\alpha)$ függvény görbéjének e szakaszát ugyanis egyenesnek véve, felírható a köv. aránylat:

$$(x - 210^\circ) : (240^\circ - x) = (70^\circ 8' 14'' - 70^\circ) : (80^\circ - 79^\circ 49' 52''),\ \text{melyből}\ x = 223^\circ 26' 54'' \tag{7a}$$

Ez tehát közelítőleg az α szög, melynek harmadrészét szerkesztésünk pontosan adja meg.

Ha már most egy 4-ik negyedben levő α szöget akarunk harmadolni, akkor vagy a $360^\circ - \alpha$ hegyes szöget harmadoljuk és harmadrészét kivonjuk $\dfrac{360^\circ}{3} = 120$-ból, vagy pedig $\dfrac{\alpha}{2}$-t harmadoljuk és a kapott szöget kétszer vesszük.

7°. A 180°-os szög harmadolásánál talált másik eljárás is eredményre vezet: az előbb leírt módon megkeressük a szögfelezőn a P pontot, majd ide beszúrva a körzőt, $\overline{OP}$ sugárral elmetsszük az $\widehat{MN}$ ívet (l. 7. ábra). Az így kapott R, Q pontok az $\widehat{MN}$ ívet közelítőleg ismét három egyenlő részre osztják.

Most tehát az $OPQ\,\Delta$ egyenlőszárú; oldalainak hosszúsága 6) szerint:

$$\overline{OQ} = 1,\quad \overline{OP} = \overline{PQ} = 2\sin\frac{\alpha}{8}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}} + \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\ldots \tag{8}$$

A $POQ\sphericalangle = \dfrac{\varphi}{2}$ szögre felírhatjuk tehát:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{OQ}}{2\overline{OP}} = \frac{1}{2\overline{OP}}\ldots, \tag{8a}$$

ill.

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{4\sin\frac{\alpha}{8}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}}+\cos\frac{\alpha}{2}}\ldots \tag{9}$$

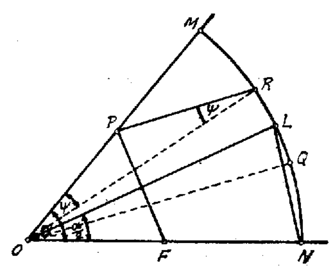
E képlet az $ROQ\sphericalangle=\varphi\approx\frac{\alpha}{3}$ szöget adja meg α függvényeként. Értéktáblázatából (l. alább) kiderül, hogy ez a szerkesztés is csak az első 3 negyed-beli szögekre alkalmazható közvetlenül. Közelítése e negyedekben rosszabb, mint az első szerkesztésé, a 4-ik negyedben azonban nem ad olyan nagy eltéréseket, mint az. Ismét 210°, és 240° között találjuk meg ezt a szöget, melynek szerkesztésünk pontosan szolgáltatja a harmadrészét. A számítás eredménye most $226°45'7''$.

8°. Legyen az $\widehat{MN}$ ív felezőpontja: S (l. 7. ábra). Ha $\widehat{QN}=\frac{\widehat{MN}}{3}$, akkor:

$$\widehat{SO}=\frac{\widehat{MN}}{2}-\frac{\widehat{MN}}{3}=\frac{\widehat{MN}}{6}=\frac{\widehat{SN}}{3},\ldots \tag{10}$$

vagyis a Q pont megszerkesztésével az $\widehat{SN}$ ívet és az $SO\sphericalangle$-et is harmadoltuk. E felfogásban tehát a szögharmadolás a következőképpen végzendő (l. 8. ábra):

Az α szög szárai közé húzott $\widehat{MN}$ ívet felezzük, azután az $\overline{NL}$ félívtávolságot körzőbe vesszük és az $\overline{ON}$ sugár F felezőpontjából e körzőnyílással elmetsszük a szög másik szárát a P pontban. (Ismét az $\widehat{MN}$ ívhez közelebb eső metszéspontot választjuk). Most e P pontba szúrjuk a körzőt és az $\overline{OP}$ sugárral elmetsszük az $\widehat{MN}$ ívet: így az ívünket harmadoló R pontot kapjuk.



8. ábra

Az OPR egyenlőszárú háromszög oldalai most:

$$\overline{OR}=1,\quad \overline{OP}=\overline{PR}=2\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4}}+\frac{1}{2}\cos\alpha,\ldots \tag{11}$$

t. i. e szerkesztés úgy fogható fel, mintha az előbbi szerkesztést hajtottuk volna végre, de 2α nagyságú szögön, tehát 8)-ban α helyett 2α írandó. A $POR\sphericalangle=\psi$ szögre felírhatjuk tehát:

$$\cos\psi=\frac{\overline{OR}}{2\overline{OP}}=\frac{1}{2\overline{OP}}\ldots, \tag{11a}$$

ill.

$$\cos\psi=\frac{1}{4\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4}}+\cos\alpha}\ldots \tag{12}$$

A $\psi\approx\frac{\alpha}{3}$ szögnek, mint α függvényének értéktáblázatából kiderül, hogy e harmadik módszer kb. 135°-ig használható, ezentúl egyre rosszabb közelítést ad. Most $113°22'33''$, az előbbi szög fele az a szög, melynek harmadrészét e szerkesztés pontosan adja.

Értéktáblázataink a következők:

α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\frac{\alpha}{3}$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
ω	0°	10°0′5″	20°0′43″	30°2′20″	40°5′10″	50°8′32″	60°10′48″
φ	0°	10°14′	20°33′	30°46′40″	40°54′24″	50°53′20″	60°43′
ψ	0°	10°16′30″	20°27′12″	30°21′30″	39°51′39″	48°46′**	56°50′39″

α	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\frac{\alpha}{3}$	70°	80°	90°	100°	110°	120°
ω	70°8′14″	79°49′52″	88°49′50″	95°43′40″	94°20′40″	0°*
φ	70°21′7″	79°43′18″	88°48′27″	97°32′	105°50′50″	113°41′18″
ψ	63°49′53″	69°29′24″	73°40′30″	76°26′28″	77°58′33″	78°27′47″

* A 4-ik negyedben ω rohamosan esik. Közbülső értékek: 345°-nál $\omega = 79°9'40''$; 357°-nál $\omega = 8°18'22''$.
** A ψ szög kb. $\alpha = 135°$-ig használható; itt $\psi = 44°24'13''$.

Mint látható, tehát mindhárom szerkesztés csak közelítő és mindháromnak más a közelítési mértéke.
Ujpest, 1937. február hó 6-án.

Dr. Elek Tibor