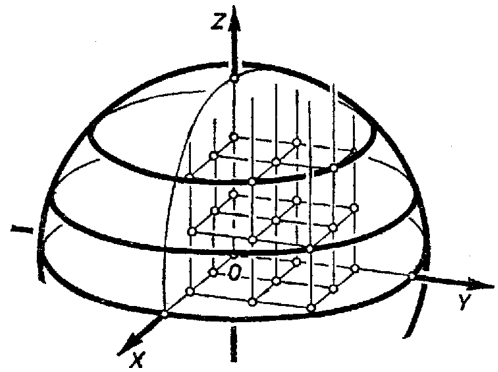
I. megoldás. *a)* Az első gömbfelület P pontjaira nézve az x, y, z koordináták négyzetösszege 100-zal egyenlő, mert ez a kifejezés adja az OP távolság négyzetét; a belső pontokra nézve pedig $x^2+y^2+z^2<100$. A gömb belsejében és a felületén levő rácspontokat z koordinátájuk szerint csoportosítva számláljuk meg, más szóval a vízszintesnek vett X és Y tengelyekkel meghatározott koordinátasík fölötti magasságuk, ill. e sík alatti mélységük értéke szerint. z a -10, $-9, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 10$ értékeket veheti fel. Az így egy csoportba sorolt rácspontok egy-egy vízszintes síkban vannak. Mindegyik sík egy kört metsz ki a gömbből (1. ábra, itt a sugár 3 egység), ennek középpontja a síknak a Z tengelyen levő pontja, ami szintén rácspont, a $z=\pm 10$ síkok pedig egy rácspontban érintik a gömböt, továbbá minden ilyen síkon a rácspontok ugyanúgy sorakoznak, mint az XY síkon.



1. ábra

Eszerint feladatunkat megoldhatjuk az 1335. feladatban végzett számlálás megismétlésével, az ottani r^2 helyére az egymás utáni metszet-körök sugarának négyzetét írva, ami nyilvánvalóan $100-z^2$, végül a síkonként kapott N rácspont-számokat összeadva. Az egyenlő abszolút értékű z értékekhez tartozó N értékek egyenlők. A számlálások eredményét a táblázat 3. sora tartalmazza, a $z>0$ értékek esetében kapott N számuk összegét 2-szer és a $z=0$-hoz tartozót 1-szer véve a gömbben és felületén $N_a=4169$ rácspont van (amiből 30 van a felületen).

z	=	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
r^2	=	0	19	36	51	64	75	84	91	96	99	100
N	=	1	61	113	161	197	241	261	293	293	305	317
N'	=	0	60	112	164	208	240	256	284	300	316	316

b) A K (1/2, 1/2, 0) koordinátájú középpont körül írt $r=10$ sugarú gömbben ugyanezen elv szerint végzett számlálás N' eredményeit a táblázat 4. sora tartalmazza, és a keresett rácspont-szám $N_b=4196$ (valamennyi a gömb belsejében).

Az 1335. feladat megoldásához fűzött 2. megjegyzéshez hasonlóan kézenfekvő az a sejtés is, hogy a koordinátarendszerbe egy elég nagy konvex testet helyezve, a benne levő rácspontok száma közelítőleg egyenlő a test térfogatának mértékszámával.

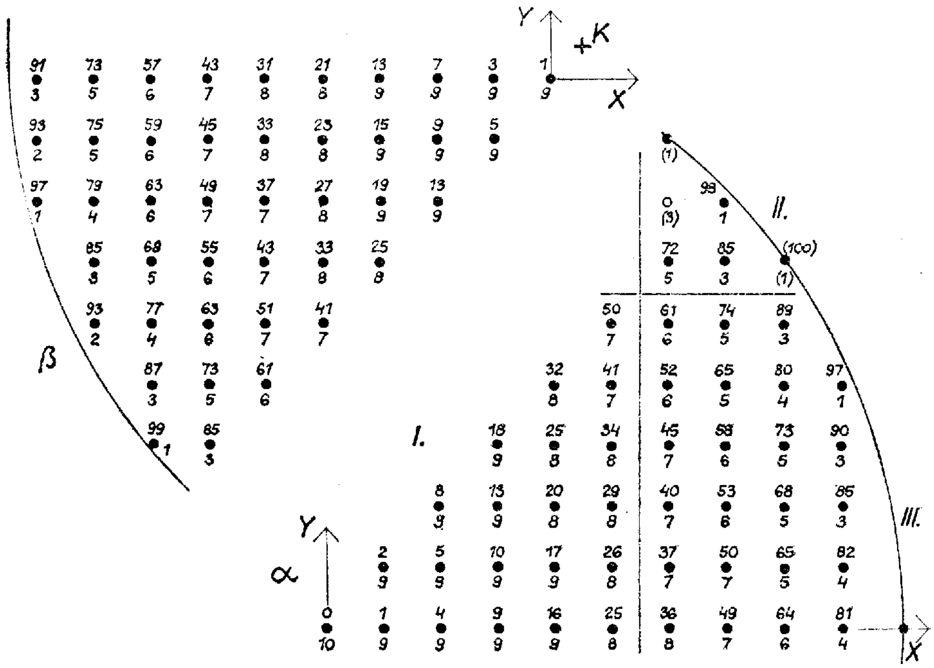
Gömbünk térfogata $10^3\cdot 4\pi/3$, ebből a π-re adódó közelítő érték $3N_a/4000=3{,}126\,75$, ill. $3N_b/4000=3{,}147$.

Herényi Isván (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

II. megoldás. A kérdéses rácspontok közül az XY sík fölöttieket a Z tengellyel párhuzamos gömbi húrok (félhúrok) szerint csoportosítva számláljuk meg. A rácspontokat tartalmazó ilyen húrok az XY sík $x^2+y^2=100$ körében levő valamelyik (x, y) rácsponton mennek át, a gömb középpontjától mért távolságuk négyzete x^2+y^2, ezért fél-hosszuk négyzete $100-x^2-y^2$, tehát a rajtuk levő rácspontok száma az ebből vont négyzetgyök egész része. A rácspontok számát megadja az ezek összegének 2-szereséből és a mondott körbeli rácspontok számából képezett összeg.

A fél-húrokon végzett számítást a szimmetriákra tekintettel elég pl. az $x\geq y\geq 0$ pontokra, a kör 1/8 részében és a határoló sugarakon levő rácspontokra elvégezni, ezután a körcikk belsejében kapott rácspont-számokat 8-szor, a sugarakon találtakat 4–4-szer kell vennünk, az origó fölöttit pedig csak 1-szer. A 2. ábra α) részén minden mondott rácspont fölé odaírtuk x^2+y^2 értékét, alája pedig az abból adódó rácspont-számot.

A két sugár rácspontjaihoz írt számok összege 69, ill. 48, együtt 117. A körcikk belsejében 4 rácsponthoz írtunk 9-et, 5-höz 8-at, 5-höz 7-et, 4-hez 6-ot, 5-höz 5-öt, 2-höz 4-et, 4-hez 3-at és 1-hez 1-et, ezek összege 181, ennélfogva a felső gömb belsejében és görbe felületén levő rácspontok száma $1\cdot 10+4\cdot 117+8\cdot 181=1926$. Végül a keresett szám $2\cdot 1926+317=4169$.



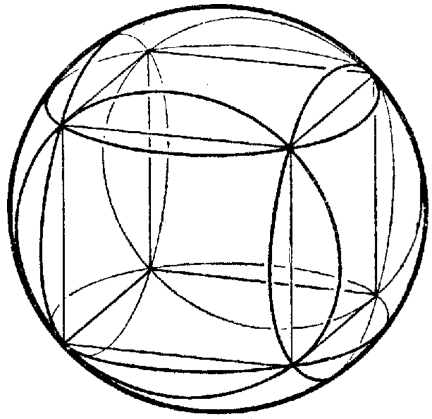
2. ábra

A második gömb esetére a húrok K-tól mért távolságának négyzete

$$d^2 = (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = x^2 - x + y^2 - y + 1/2,$$

így a húr félhosszának négyzete $99{,}5 - x^2 - y^2 + x + y$, nem egész szám, így végpontja nem lehet rácspont. Ezért egyszerűség kedvéért a fenti mintára készült ábra rácspontjaiba d^2 egészre fölkerekített értékét írtuk be (a 2. ábra β részén az $(x-1/2)^2 + (y-1/2)^2 = 100$ körből az $x \le y \le 0$ nyolcadrész szerepel), továbbá ismét a fél-húr rácspontjainak számát, az XY síkon levő pontot most sem számítva. A tengelyek szögfelezője menti sugáron az összeg 51, a körcikkben 217, így a félgömb belsejében $4 \cdot 51 + 8 \cdot 217 = 1940$, és az egész gömbben $2 \cdot 1940 + 316 = 4196$.

Deák Jenő (Budapest, Kölcsey F. g. IV. o. t.)



3. ábra

Megjegyzés. Az *a)* esetben a $2.\alpha$ ábra szerinti számítást leszűkíthetjük az I. és II. síkrészbeli pontokra, ha a gömböt a tengelyekkel párhuzamos élekkel bíró, beírt kocka lapsíkjaival az 1311. feladatban látott módon részekre osztjuk (3. ábra). A kocka élének félhossza $10/\sqrt{3} \approx 5{,}8$ egység, így egy lapsík sem megy át rácsponton. A kocka belsejében levő rácspontok száma $(2 \cdot 5 + 1)^3 = 1331$. 1 – 1 kockalap fölötti boltozatban levő rácspontok száma az I. síkrész szerint számítható, minden fél-húr alsó 5 rácspontját lehagyva: $5 + 4(19 + 17) + 8 \cdot 33 = 413$. Az éleknél keletkező gerezdbeli rácspontok száma pedig a II. síkrész szerint, figyelembe véve a húrok teljes hosszát, valamint az XY síkbeli kör 2 kerületi rácspontját:

$$11 + 3 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 30.$$

Mindezek szerint a rácspontok száma $1331 + 6 \cdot 413 + 12 \cdot 30 = 4169$.

Domokos László (Tatabánya, Árpád g. IV. o. t.)