I. A $2n^3$ számok köbgyökeiről, vagyis az $a_n = n\sqrt[3]{2}$ számokról, az első adat többszöröseiről van szó $n = 1, 2, \ldots, 8$ eseteire. A 6. tizedesig véve az adatok $n \cdot 1{,}259\,921$-dal egyenlők. Legyen

$$\sqrt[3]{2} - 1{,}259\,921 = \varepsilon,$$

így $n\,\varepsilon$-nak 10^{-7}-re kerekített értéke a közlés szerint rendre

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4\ \text{ tízmilliomod},$$

és nyilvánvalóan[1] $\varepsilon > 0$. Nem lehet a_1 és a_5 mindegyike helyes, mert ha a_1 helyes, akkor $0 < \varepsilon < 0{,}5 \cdot 10^{-7}$, így $0 < 5\varepsilon < 2{,}5 \cdot 10^{-7}$, kerekítve legfeljebb $2 \cdot 10^{-7}$; eszerint az állítás helyes.

II. Hasonlóan ellentmond egymásnak a_1 és a_7 kerekítése, az a_3, a_5 és az a_3, a_7 adat-pár kerekítése.

Az adatok ellenőrzésére megmutatjuk, hogy a_8 adott közelítő értéke helyes fölkerekítéssel keletkezett, vagyis hogy $3{,}5 < 8\varepsilon \cdot 10^7 = \eta < 4$. Legyen

$$\sqrt[3]{1024} = 10{,}079\,368\ldots = b + \eta \cdot 10^{-7}, \text{ ahol } b = 10{,}079\,368, \tag{2}$$

és mint majd megmutatjuk, $\eta > 0$. Ekkor

$$1024 = \left(b + \eta \cdot 10^{-7}\right)^3 = b^3 + 3b^2\eta \cdot 10^{-7} + 3\eta^2(b + \eta \cdot 10^{-7}/3) \cdot 10^{-14}. \tag{3}$$

Utolsó tagját elhagyva a jobb oldal csökken:

$$1024 > b^3 + 3b^2\eta \cdot 10^{-7}, \text{ amiből}$$

$$\eta < \frac{1024 - b^3}{3b^2} \cdot 10^7, \tag{4}$$

és elég azt belátnunk, hogy itt a jobb oldal kisebb, mint 4. Ennek során b^3 és b^2 helyére kevesebb tizedes jegyet tartalmazó közelítő értéküket írjuk. Mindkét helyen csak alulról közelítő értéket szabad használnunk, mert a számlálót nem szabad csökkentenünk és a nevezőt nem szabad növelnünk. Látni fogjuk, hogy elegendő lesz b^3 esetében 8, b^2 esetében pedig 1 tizedes jegyet tartalmazó közelítő értéket használni. A $b = 10{,}08 - 6{,}32 \cdot 10^{-4}$ átalakítás egyszerűbb számítást tesz lehetővé:

$$\begin{aligned} b^3 &= 10{,}08^3 - 3 \cdot 1{,}008^2 \cdot 6{,}32 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 1{,}008 \cdot 6{,}32^2 \cdot 10^{-7} - 6{,}32^3 \cdot 10^{-12}, \\ b^2 &= 10{,}08^2 - 2 \cdot 1{,}008 \cdot 6{,}32 \cdot 10^{-3} + 6{,}32^2 \cdot 10^{-8}. \end{aligned} \tag{5}$$

A kivonandó tagokat fölfelé, a $+$ jelűeket lefelé kerekítve:

$$b^3 > 1024{,}192\,512 - 0{,}192\,645\,74 + 1207 \cdot 10^{-8} - 1 \cdot 10^{-8},$$

$$1024 - b^3 < 1216{,}8 \cdot 10^{-7}, \text{ és hasonlóan } 3b^2 > 304{,}5,$$

így pedig (4) jobb oldala kisebb az $1216{,}8/304{,}5$ hányadosnál, ami valóban kisebb 4-nél.

Most már (3) utolsó tagja, (2)-t is figyelembe véve

$$3\eta^2(b + \eta \cdot 10^{-7}/3) \cdot 10^{-14} < 3 \cdot 4^2 \cdot 11 \cdot 10^{-14} < 6 \cdot 10^{-12},$$

ezt írva helyére, a jobb oldal növekszik:

$$1024 < b^3 + 3b^2\eta \cdot 10^{-7} + 6 \cdot 10^{-12}, \text{ amiből}$$

$$\eta > \frac{1024 - b^3}{3b^2} \cdot 10^7 - \frac{2}{b^2} \cdot 10^{-5}. \tag{6}$$

A jobb oldal első tagja helyére most csak kisebb számot írhatunk, ezért b^3 és b^2 fölkerekített értékeit kell használnunk. (5)-ből, a $+$ jelű tagokat fölfelé, a kivonandókat lefelé kerekítve $1024 - b^3 > 1216{,}4 \cdot 10^{-7}$ (tehát valóban $b^3 < 1024$ és $\eta > 0$), továbbá $3b^2 < 305{,}4$. Így az $1216{,}4/305{,}4$ hányadost kiszámítva és lefelé kerekítve (6) első tagja nagyobb 3,982-nél. A (6)-beli kivonandót viszont csak növelni szabad, vagyis nevezőjét csökkenteni; $b^2 > 10^2$ miatt e tagot $2 \cdot 10^{-7}$-re, majd tovább 10^{-3}-ra növelve $\eta > 3{,}981 > 3{,}5$. Ezt akartuk bizonyítani.

Minthogy $8\varepsilon = \eta \cdot 10^{-7}$, azért $\varepsilon < 0{,}5 \cdot 10^{-7}$, így a_1 is helyesen van kerekítve, és (1)-ben csupán két helyesbítés végzendő:

250 köbgyöke: 6,299 6052, 686 köbgyöke: 8,819 4473.

Megjegyzések. 1. A $3{,}5 < \eta < 4$ egyenlőtlenség kevesebb meggondolással, de fárasztó, ismételt szorzással adódik abból, hogy $10{,}079\,3684^3 = 1024{,}000\,000\,25\ldots$, és $10{,}079\,368\,35^3 = 1023{,}999\,985\ldots$

2. A kerekítés kérdését itt az tette érdekessé, hogy a páratlan indexű adatokban az elhagyott rész közel jár a lehető legnagyobb értékhez, a páros indexűekben viszont a végzett növelés a lehető legkisebb értékhez jár közel. 8 és 9 tizedesre kerekítve $\sqrt[3]{2}$ végződése 05, ill. 050, ugyanis $10^7 \cdot \varepsilon = 0{,}4989\ldots$[2]

[1] Feltesszük ugyanis, hogy csak kerekítési hiba van a táblázaton, vagyis nem kell 10^{-7}-nél többet változtatnunk.

[2] Hasonlóan a π szám 767 tizedesre kerekített értékében a végződés 50000 00, ugyanis a jegyek: …49999 99837 29780 49951 …