I. A követelménynek sokféleképpen eleget tehetünk. Bármely t szám írható másodrendű determináns alakban:

$$t = \begin{vmatrix} t & 0 \\ u & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{ezért az} \quad \begin{vmatrix} 1/D & 0 \\ u & 1 \end{vmatrix}$$

determináns – ahol u tetszés szerinti szám – megfelel a követelménynek. – Alább egy más úton adunk megfelelő determinánst.

Legyen az x, y, z, u elemekkel felírt determinánsra

$$X = \begin{vmatrix} x & y \\ z & u \end{vmatrix} = \frac{1}{D},$$

azaz a két determináns szorzatát sor–sor kompozícióval végezve

$$DX = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ z & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax+by & az+bu \\ cx+dy & cz+du \end{vmatrix} = 1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Az utolsó két determináns nyilvánvalóan egyenlő, ha elemeik rendre megegyeznek, ennélfogva x, y, z, u megfelel, ha

$$ax + by = 1, \tag{3}$$
$$cx + dy = 0. \tag{4}$$
$$az + bu = 0, \tag{5}$$
$$cz + du = 1. \tag{6}$$

Vonjuk ki (3) d-szereséből (4) b-szeresét, majd (3) c-szereséből (4) a-szorosát:

$$(ad - bc)x = Dx = d, \qquad (bc - ad)y = -Dy = c,$$
$$\text{így } x = d/D, \qquad y = -c/D,$$

és hasonlóan az (5), (6) egyenletrendszerből

$$z = -b/D, \qquad u = a/D.$$

Így az idézett gyakorlat (8) és (6) egyenlőségeiben látott kiemelési, ill. felcserélési átalakításokkal valóban teljesül a feltétel

$$X = \begin{vmatrix} d/D & -c/D \\ -b/D & a/D \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} d & -c \\ -b & a \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{D^2} \cdot \begin{vmatrix} a & -b \\ -c & d \end{vmatrix} = \frac{1}{D^2} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{D}{D^2} = \frac{1}{D}.$$

Az utolsó lépésben a mellékátlóban álló elemek helyére a negatívjukat írtuk, így szorzatuk értéke nem változott meg.

(2)-ből ugyanezen az úton tetszés szerinti számú megfelelő determinánst kaphatunk, az utolsó átalakítás helyére más megfelelőt írva, ugyanis pl.

$$1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{vmatrix}.$$

II. Írjunk z helyére egy határozott z_0 ($\neq 0$) értéket. Szorozzuk (1) egyenleteit előbb rendre e-vel és $-b$-vel, majd $-d$-vel és a-val. Így összeadva őket

$$(ae - bd)x - (bf - ce)z_0 = 0, \qquad (ae - bd)y - (cd - af)z_0 = 0,$$
$$x = \frac{bf - ce}{ae - bd} \cdot z_0, \qquad y = \frac{cd - af}{ae - bd} \cdot z_0,$$

hacsak a közös nevező nem 0, különben bármely z_0 esetén vagy végtelen sok x, y, z_0 számhármas elégíti ki (1)-et, vagy egy számhármas sem. A két számláló és a nevező felírható másodrendű determinánsként, így a keresett arány nem lehet más, mint

$$x : y : z = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}. \tag{7}$$

A (7)-beli első két determináns körül legfeljebb egy lehet 0. Ha ugyanis mind a kettő 0, akkor a harmadik is, mert $bf - ce = cd - af = 0$ esetén $e/b = f/c = d/a = k$, és így $ae - bd = 0$. Ekkor (1) második egyenlete az elsőből megkapható k-val való szorzással.

A kérdés további diszkussziója itt nem feladatunk.

Dombi József (Szeged, Ságvári E. gyak. g. III. o. t.)