I. Az (1) bal oldalán álló törtek – a számláló egytagú tényezőjétől eltekintve – azonosak az idézett cikk (2) kifejezésében megismert $l_k(x)$ polinomokkal arra az esetre, ha egyrészt $k=4$, másrészt $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$, $x_4=d$ egymástól különböző számok (ha ti. a 2. tört előtti $(-1)$-gyel beszorzunk a nevező 1. tényezőjébe, a 3. tört előtti $+1=(-1)^2$ egyes tényezőivel a nevező első két tényezőjébe, végül a 4. tört előtti $(-1)^3$ egyes tényezőivel a nevező mindegyik tényezőjébe).

A számlálók előbb figyelmen kívül hagyott tényezője viszont rendre $x_i$-vel egyenlő $i=1$, 2, 3, 4 esetére. Eszerint a bal oldal az a legfeljebb 3-adfokú *Lagrange*-féle interpolációs polinom, melynek értéke az $a$ helyen $a$, a $b$ helyen $b$, a $c$ helyen $c$ és a $d$ helyen $d$. Ugyanezek az értékei a mondott helyeken a $P(x)=x$ elsőfokú polinomnak is. Márpedig ha két, légfeljebb 3-adfokú polinom 4 különböző helyen megegyezik, akkor minden helyen megegyeznek[2], tehát az első azonosság következik az interpolációnak az idézett cikkben megismert tételeiből.

II. Legyen a (2) bal oldalán álló kifejezés $T(x)$, a jobb oldali tört függvény nevezője $N(x)$, ekkor azt kell belátnunk, hogy $T(x)\cdot N(x)=1$ a $T(x)$ és $1/N(x)$ közös értelmezési tartományának minden helyén, azaz minden olyan $x$-re, amely az (egymástól is különböző) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok mindegyikétől különböző. A szorzatból pl. a második tört így írható:

$$1\cdot\frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)},$$

a többiek hasonlóan, és ebből látjuk, hogy az új bal oldal az a legfeljebb $n-1$-edfokú *Lagrange*-féle interpolációs polinom, mely az $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\ldots$, a$_n$ helyek mindegyikén az 1 értéket veszi fel. Ilyen a $Q(x)=1$ (0-adfokú) polinom is, és mivel a mondott helyek $n$ száma nagyobb, mint a fokszámként szóba jövő legnagyobb érték, azért az új bal oldal azonos az 1 polinommal, ami a (2) jobb oldalán álló racionális törtfüggvény számlálója. Eszerint az új bal oldalt $N(x)$-szel osztva egyrészt (2) jobb oldalát kapjuk, másrészt visszakapjuk (2) eredeti bal oldalát, tehát (2) valóban azonosság egész értelmezési tartományában, azaz minden $x$-re, kivéve az $a_1, \ldots, a_n$ helyeket.

III. Adjuk össze (1) első két tagját, közös nevezőnek az $(a-b)(a-c)\cdot(a-d)(b-c)(b-d)$ szorzatot véve. A számlálók közös $(x-c)(x-d)$ tényezőjének kiemelése után a maradó tényezőt $x$ szerint rendezve $(a-b)$ is kiemelhető:

$$\begin{gathered}a(b-c)(b-d)(x-b)-b(a-c)(a-d)(x-a)=\\=(ab^2-a^2b+acd-bcd)x+ab\left[a^2-b^2-(a-b)(c+d)\right]=\\=(a-b)\big[(cd-ab)x+ab(a+b-c-d)\big],\end{gathered}$$

ezért $cd-ab=e$ és $ab(a+b-c-d)=f$ jelöléssel az első két tag összege

$$\frac{(x-c)(x-d)(ex+f)}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}. \tag{3}$$

(1) utolsó két tagja előáll az első kettőből, ha bennük minden $a$, $b$, $c$, $d$ betű helyére rendre $c$, $d$, $a$, $b$ betűt írunk, ezért az utolsó két tag összege (3)-ból ugyanezen cserékkel:

$$\frac{(x-a)(x-b)(e'x+f')}{(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)}, \tag{4}$$

ahol $e'=ab-cd=-e$, és $f'=cd(c+d-a-b)$. Most már csak (3) és (4) összegéről kell megmutatnunk, hogy egyenlő a jobb oldali $x$-szel. A nevező közös. A számlálók összegében $x^3+x^2$ együtthatója, valamint az $x$-től mentes tag eltűnik: $e+e'=0$, $f-e(c+d)+f'-e'(a+b)=0$, $cdf+abf'=0$; $x$ együtthatója pedig

$$E=cde-f(c+d)+abe'-f'(a+b).$$

Itt az első és utolsó tag összege

$$\begin{gathered}cde-f'(a+b)=cd\left[cd-ab-(a+b)(c+d)+(a+b)^2\right]=\\=acd(a-c)+cd(a-c)(b-d)+bcd(b-d);\end{gathered}$$

a közbülső két tag innen a mondott betűcserével

$$=cab(c-a)+ab(c-a)(d-b)+dab(d-b).$$

Az első tagok, valamint a harmadik tagok közös tényezőit kiemelve a maradó tényező $d-b$, ill. $c-a$, így

$$E=(a-c)(b-d)(-ac+cd+ab-bd),$$

és itt a harmadik zárójel $(a-d)(b-c)$. Ezek szerint $E$ egyenlő (3) nevezőjével, tehát $x$ együtthatója 1. Ezzel igazoltuk (1)-et.

[2] Lásd e tétel bizonyítását (3 és 4 helyén $n$-nel, ill. $n+1$-gyel): *Surányi János:* Polinomok azonossága, K. M. L. 23 (1961) 103–105. o.

A (2) azonosságot teljes indukcióval bizonyítjuk. A bal oldal $n=2$ esetén

$$\frac{1}{(x-a_1)(a_1-a_2)}+\frac{1}{(x-a_1)(a_2-a_1)}=\frac{x-a_2-x+a_1}{(x-a_1)(x-a_2)(a_1-a_2)},$$

egyszerűsítés után azonos a jobb oldallal, az állítás helyes. ($n=1$ esetén is helyes, a bal oldal is csak egy tagot tartalmaz, a nevezője $x-a_1$.) Tegyük fel, hogy (2) igaz, $n$ helyén egy bizonyos $k(>2)$ indexre, ezután írjuk be $x$ helyére $T_k$ értelmezési tartományának ($x\neq a_i$, és persze $a_i\neq a_j$, ha $i$, $j=1, 2, \ldots, k$, $i\neq j$) egy tetszés szerinti $a_{k+1}$, helyét, majd vonjuk ki az utóbbi egyenlőséget, a bal oldalon úgy, hogy az ugyanannyiadik tagokat vonjuk össze páronként. Ezzel egy újabb, a $T_k$-ban érvényes azonosságot kapunk. A különbség jobb oldala

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)}-\frac{1}{(a_{k+1}-a_1)(a_{k+1}-a_2)\ldots(a_{k+1}-a_k)}.$$

A bal oldalon elég lesz a különbség szerkezetét pl. a második tag-párra vizsgálni, a nevezők közös $(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_k)=A_{k2}$ tényezőjét mindjárt kiemelve

$$\frac{1}{A_{k2}}\left(\frac{1}{x-a_2}-\frac{1}{a_{k+1}-a_2}\right)=\frac{x-a_{k+1}}{(x-a_2)\cdot A_{k2}\cdot(a_2-a_{k+1})}.$$

Eszerint az összevonás után minden tag-pár számlálója ugyanaz. Osszuk az azonosságot az $x-a_{k+1}$ közös számlálóval és vigyük át a jobb oldal második tagját a bal oldalra, így (2)-t kapjuk $n$ helyén a $k+1$ indexszel (és a $T_{k+1}$ értelmezési tartományt $T_k$-ból kapjuk $a_{k+1}$ elhagyásával), tehát a (2) azonosság bármely $n$ indexre érvényes.

IV. (1) akkor is érvényes marad, ha a jobb oldalon $x$ helyére $x^2$-et vagy $x^3$-t, vagy $x^0=1$-et írunk, és egyidejűen a bal oldali törtek $a$, $b$, $c$, $d$ tényezője helyére is a négyzetüket, a köbüket, ill. 1-et írjuk. Általánosabban, ezt a négy azonosságot rendre a tetszés szerinti $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_0$ állandóval szorozva és összeadva érvényes az az azonosság is, amely (1)-ből adódik, a jobb oldali $x$ helyére a

$$P(x)=e_3x^3+e_2x^2+e_1x+e_0$$

polinomot és az $a$, $b$, $c$, $d$ tényezők helyére rendre e polinomnak e helyeken felvett $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$, $P(d)$ értékét írva. – Kiterjeszthetjük (1)-et úgy is, hogy 4-nél több helyet választunk.

Hasonlóan lehet belátni, hogy (2)-ből további azonosságokat kapunk a jobb oldalt tetszés szerinti, legfeljebb $n-1$-ed fokú $Q(x)$ polinommal, a bal oldal tagjait pedig rendre $Q(a_1)$-gyel, $Q(a_2)$-vel, $\ldots$, $Q(a_n)$-nel szorozva.

*Szeredi Péter* (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)
*Herényi István* (Budapest, I. István g. IV. o. t.)
*Bárány Imre* (Budapest, Corvin Mátyás g. IV. o. t.)