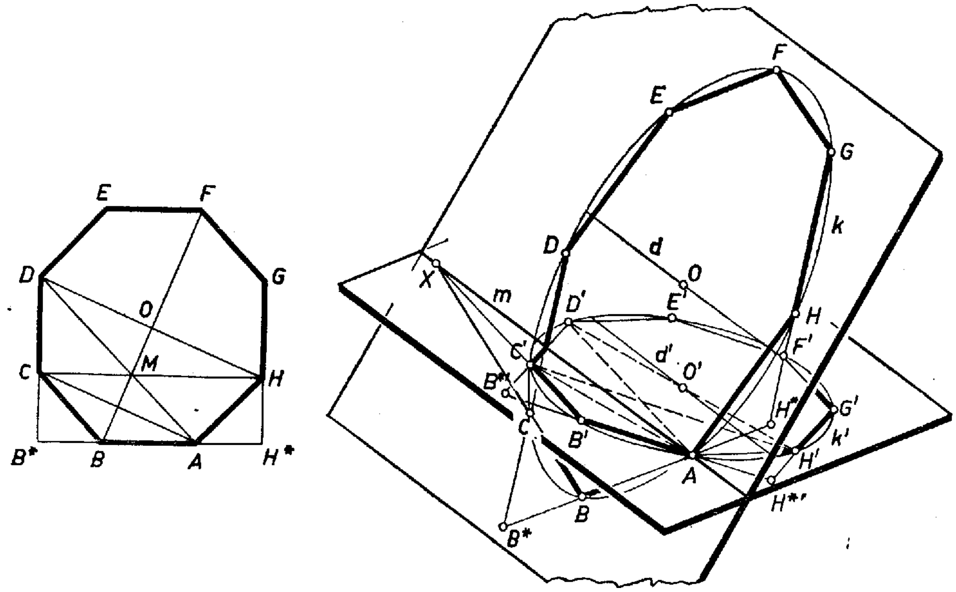
I. megoldás. Felhasználjuk, hogy egy egyenes két szakaszának arányát a merőleges vetítés változatlanul hagyja, továbbá, hogy párhuzamos egyenesek vetületei párhuzamosak.



1.a *és* *1.b ábra*

Messék a nyolcszög CD és GH oldalegyenesei AB-t B^*-ban, ill. H^*-ban (1. a ábra). BCB^* és HAH^* egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszögek, $BB^* = AH^* = AB/\sqrt{2}$. Ennek alapján AB' meghosszabbításaira felmérve az $AB'/\sqrt{2}$ szakaszt (1. b ábra), megkapjuk B^* és H^* vetületét. (A felmért szakasz az AB' szakasz mint átfogó fölé szerkesztett egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója.) A $B^{*'}C'$ egyenesből az A-n átmenő, $B'C'$-vel párhuzamos egyenes kimetszi D'-t, mert $AD \parallel BC$, másrészt a $C'B^{*'}H^{*'}$ háromszöget paralelogrammává kiegészítő pont H'. Ekkor $D'H'$ felezőpontja a nyolcszög O középpontjának O' vetülete, erre tükrözve A-t, B'-t és C'-t kapjuk a hátra levő E', F', G' vetületeket.

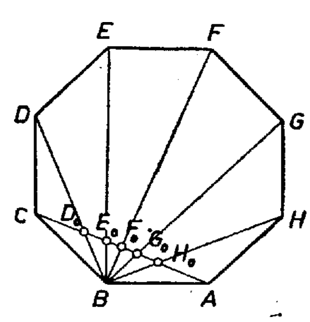
Tekintsük a nyolcszög köré írt k kört. Ennek egy d átmérője párhuzamos a keresett m metszésvonallal, és így rajzunk síkjával is, tehát d a vetítéskor nem rövidül. Minden más átmérő hajlik a síkhoz, így vetülete rövidebb az átmérőnél. Ezért d-nek d' vetülete lesz a k vetületeként adódó k' ellipszis nagy tengelye. Ezt megkaphatjuk abból, hogy OA és OC a k-nak egymásra merőleges, tehát konjugált félátmérői, és ezért $O'A$ és $O'C'$ a k'-nek konjugált félátmérői. [1] Végül m átmegy A-n és párhuzamos d'-vel

Szeredi Péter (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. D, E, F, G, H és O vetületét számos más módon is megszerkeszthetjük.

Az AD és CH átlók M metszéspontja (1. a ábra) paralelogrammává egészíti ki ABC-t, a mondott átlókat $1 : \sqrt{2}$ arányban osztja ketté, továbbá rajta van a BF szimmetriatengelyen, és BO-t $\sqrt{2} : 1$ arányban osztja ketté. $AB'C'M'$ ugyancsak paralelogramma, ezután D', O' szerkeszthetők.

Sarkadi Nagy István (Debrecen, Ref. Koll. G. IV. o. t.)

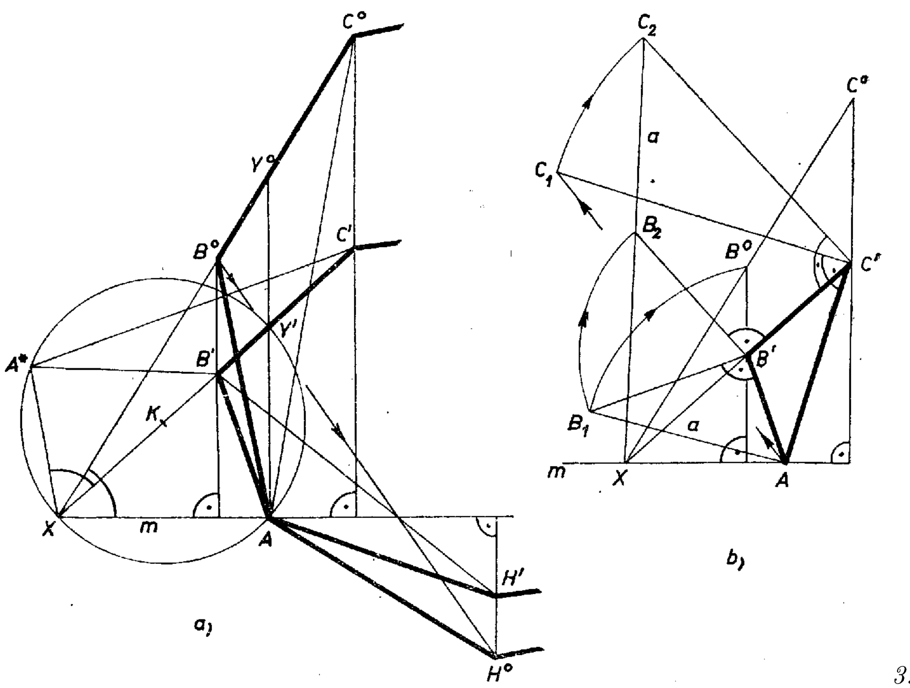


2. ábra

2. Legyen BD, BE, BF, BG, BH metszéspontja AC-vel rendre D_0, E_0, F_0, G_0, H_0. Ezek vetületei ugyanolyan arányban osztják AC'-t, mint a pontok AC-t (D_0 és H_0 tükrös párok is F_0-ra), így egy tetszés szerinti S_8 szabályos nyolcszöget felvéve AC'-n kijelölhetők, tovább pedig pl. D'-t a $B'D' : B'D_0' = BD : BD_0$ arány alapján szerkesztjük (2. ábra).

Korchmáros Gábor (Budapest, Rákóczi F. g. IV. o. t.)

[1] Lásd 1416. feladat, ezen számban, 208. o.



3. ábra

II. megoldás. Először a BC egyenesnek a rajz síkján levő X döféspontját szerkesztjük meg, ekkor a síkok metszésvonala $AX=m$; X a $B'C'$-n lesz (3. a ábra). Forgassuk be a nyolcszög síkját rajzunk síkjába m körül. Így A a helyén marad, B a B'-ből m-re állított merőleges egy B^0 pontjába jut (mert a B-ből és B'-ből m-re bocsátott merőlegesek ugyanott metszik m-et, ez a forgatás közben B által leírt körív középpontja), ugyanígy C a C'-n átmenő, m-re merőleges egyenes egy C^0 pontjába úgy, hogy B^0C^0 átmegy X-en. Az $XB':XB^0=XB':XB$ és a $B'C':B^0C^0$ arányok egyenlők, mert közös λ értékük BC és a rajzsík hajlásszögének a koszinusza. Meggondolásunkban felhasználjuk az A-ban m-re állított merőleges sík és a BC egyenes Y metszéspontját is; ennek vetülete Y', leforgatottja Y^0, és erre is fennáll $XY':XY^0=\lambda$.

Legyen A^* olyan pont, melyre $A^*B'C'\Delta \sim AB^0C^0\Delta$, a csúcspárok a felsorolások rendjében legyenek megfelelők (azaz $A^*B'=B'C'$ és $A^*B'C'\sphericalangle=135°$). A hasonlóság miatt $A^*B':AB^0=B'C':B^0C^0=\lambda$, másrészt $A^*B'X\sphericalangle=AB^0X\sphericalangle$, így $XB'A^*\Delta\sim XB^0A\Delta$, ezért egyrészt $B'XA^*\sphericalangle=B^0XA\sphericalangle$, másrészt $XA^*:XA=\lambda$, ennélfogva $XA^*Y'\Delta\sim XAY\Delta$.

Mindezek szerint $XA^*Y'\sphericalangle=XAY^0\sphericalangle=90°=XAY\sphericalangle$, így X, A, Y' és A^* egy kör pontjai, melyben XY' átmérő, ennélfogva e kör K középpontját AA^* felező merőlegese metszi ki $B'C'$-ből, sugara KA; e körnek $B'C'$-n levő, A^*-hoz közelebbi pontja X – mert így a távolabbi lesz Y', arra ugyanis $A^*Y':AY'>1$, ami nem lehet hajlásszög koszinusza –, végül az AX egyenes a keresett m.

Ezek után X-ben felmérjük az $AXB^0=A^*XB'$ szöget, ennek új szárából a B'-n és C'-n át m-re állított merőleges kimetszi B^0-t, ill. C^0-t; a további 5 csúcs leforgatottja az AB^0C^0 háromszög köré írt körből az AB^0 húr ismételt felmérésével kapható. Ezek alapján pl. H'-t abból kapjuk, hogy egyrészt B^0H^0 kimetszi m-ből azt a pontot, ahol (a térbeli) BH átmegy rajta, és itt $B'H'$ is átmegy, másrészt, hogy $H'H^0\perp m$; vagy pl. D'-t megadja a D^0-on átmenő, m-re merőleges és az A-n átmenő, $B'C'$-vel párhuzamos egyenes metszéspontja.

A szerkesztés helyessége a végzett gondolatmenet megfordításával belátható. K csak akkor nem jön létre, ha AA^* merőleges $B'C'$-re. Ekkor $AB'C'\sphericalangle>135°$ esetén $m\parallel B'C'$, $AB'C'\sphericalangle<135°$ esetén $m\perp B'C'$, $AB'C'\sphericalangle=135°$ esetén pedig nincs metszésvonal, a nyolcszög a rajzsíkban van. Ezek igazolását az olvasóra hagyjuk.

Kádas Sándor (Budapest, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A következő gondolatmenettel szintén a metszésvonal ismeretében jutunk el a vetülethez. Tegyük fel, hogy ismerjük a szabályos nyolcszög $AB=a$ oldalát is. Így megszerkeszthetjük B-nek és C-nek a rajzsíktól való távolságát. Messe az A körüli, a sugarú körív a B'-ben AB'-re emelt merőlegest B_1-ben, ekkor B távolsága $B'B_1$, mert $AB'B_1$ az $AB'B$ derékszögű háromszög lefordítottja AB' körül a rajzsíkba. Fordítsuk le hasonlóan az $AC'C$ derékszögű háromszöget is AC' körül az $AC'C_1$ helyzetbe; ennek AC_1 átfogója a nyolcszög AC átlója, ami az a szárhosszúságú és 135° szárszögű egyenlő szárú háromszög alapja; így C távolsága $C'C_1$. Fordítsuk le végül a $B'C'CB$ derékszögű trapézt $B'C'$ körül a $B'C'C_2B_2$ helyzetbe; ennek párhuzamos oldalai $B'B_2=B'B_1$ és $C'C_2=C'C_1$, az utóbbi irányát úgy választva, hogy teljesüljön $B_2C_2=a$. Ekkor a B_2C_2 és $B'C'$ egyenesek X metszéspontja BC-nek a rajzsíkon levő pontja, és a metszésvonal AX. (Amennyiben $AB'=a$, akkor m azonos AB'-vel, $AC'=AC$ esetén pedig AC'-vel, végül ha $AB'=a$ és $AC'=AC$, akkor a nyolcszög a rajzsíkban van.)

Most már megszerkeszthetjük a nyolcszögnek m körüli lefordítottját. B és C új helyzetét, B^0-t, ill. C^0-t a B'-n, ill. C'-n át m-re állított merőlegesből az A körüli a sugarú körív, ill. az XB^0 egyenes metszi ki; ezekből a fentiek szerint kapjuk a további csúcsok lefordítottját, majd vetületüket.

Berkes Zoltán (Budapest, Bolyai J. g. III. o. t.)

2. Az a nyolcszögoldalt kiszámíthatjuk a $B'C' = p$, $C'A = q$ és $AB' = r$ oldalakból. Legyen B és A magasságkülönbsége $B'B_1 = z_1$, C és B magasságkülönbsége z_2 (mindkettőt előjellel együtt értve), így C és A magasságkülönbsége $z_1 + z_2$ és

$$AB^2 = r^2 + z_1^2 = a^2, \qquad BC^2 = p^2 + z_2^2 = a^2,$$
$$AC^2 = q^2 + (z_1 + z_2)^2 = 4a^2 \cos^2 22{,}5^\circ = a^2(2 + \sqrt{2}).$$

z_1, z_2 kiküszöbölésével, majd a $2p^2q^2 + 2q^2r^2 + 2r^2p^2 - p^4 - q^4 - r^4$ kifejezésben felismerve az $AB'C'\Delta$ t területe négyzetének 16-szorosát:

$$a^4 - [(2 + \sqrt{2})(p^2 + q^2) - \sqrt{2}q^2]a^2 + 8t^2 = 0.$$

Innen a meg is szerkeszthető.