

I. Jelöljük a test egy csúcsába összefutó éleit a , b , c -vel, így felszíne $F = 2(ab + ac + bc)$, szabad felszíne pedig a mondott 3 állásban:

$$(1) \quad F - ab = kr, \quad F - bc = kp, \quad F - ca = kq,$$

ahol k valamely alkalmas, a 0-tól különböző szám. A bal oldalak mindegyike nagyobb $F/2$ -nél, így p , q , r mindenestre 0-tól különbözők és egyenlő előjelűek. Elég azzal az esettel foglalkoznunk, ha p , q , r mindegyike pozitív, így $k > 0$ is fennáll.

Az (1) egyenleteket összeadva, majd az F -re adódó kifejezést mindegyikbe visszahelyettesítve

$$\begin{aligned} 3F - F/2 = 5F/2 = k(p + q + r), \quad F = 0,4 \cdot k(p + q + r), \\ bc = F - kp = 0,2k(-3p + 2q + 2r), \\ ca = 0,2k(2p - 3q + 2r), \quad ab = 0,2k(2p + 2q - 3r). \end{aligned}$$

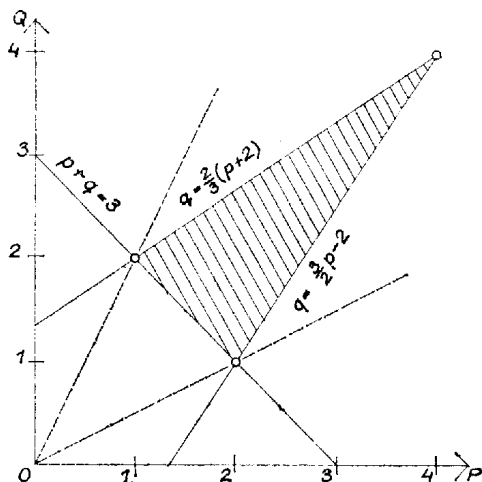
Így az élek aránya, élve az egyszerűsítési lehetőségekkel

$$\begin{aligned} a : b : c &= \frac{abc}{bc} : \frac{abc}{ca} : \frac{abc}{ab} = \frac{1}{bc} : \frac{1}{ca} : \frac{1}{ab} = \\ &= \frac{1}{-3p + 2q + 2r} : \frac{1}{2p - 3q + 2r} : \frac{1}{2p + 2q - 3r}. \end{aligned}$$

II. Itt a , b , $c > 0$ miatt a három nevezőnek egyenlő előjelűnek kell lennie. És mivel összegük $p + q + r > 0$, mindegyik pozitív:

$$\begin{aligned} (2) \quad & 2p + 2r > 3q, \\ (3) \quad & 2p + 2q > 3r, \\ (4) \quad & 2q + 2r > 3p. \end{aligned}$$

Varga Gabriella (Szombathely, Savaria g. III. o. t.)



Megjegyzés. Szemléletes képet kapunk a (2)–(4) feltételekről az alábbiak szerint. Nem megy az általánosság rovására, ha az egyik arányszám értékét megválasztjuk; legyen $r = 2$. Az így módosuló föltételeknek azok a p , q számpárok tesznek eleget, amelyeket a P , Q derékszögű koordináta-rendszer pontjai koordinátáinak tekintve, a megfelelő pontok a $q = (2p + 4)/3$ egyenes alatt és a $q = 3 - p$, valamint a $q = (3p - 4)/2$ egyenes fölött vannak (1. ábra), vagyis a (4, 4), (1, 2) és (2, 1) csúcsokkal meghatározott háromszög belső pontjainak koordináta-párjai. – Könnyű azt is leolvasni az ábráról, hogy a p , q , r arányszámok egyike sem érheti el a nála kisebb (kisebbek) 2-szeresét.