Az 1403. gyakorlat II. megoldásához hasonlóan képezzük azt az egyenletet, melynek gyökei az

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

egyenlet gyökeinek négyzetei. A páratlan és páros fokú tagokat szétválasztva, négyzetre emeléssel, rendezéssel

$$x^3 + bx = -(ax^2 + c), \qquad x^6 + 2bx^4 + b^2x^2 = a^2x^4 + 2acx^2 + c^2,$$
$$(x^2)^3 - (a^2 - 2b)(x^2)^2 + (b^2 - 2ac)x^2 - c^2 = 0.$$

Természetesen az (1)-ben szereplő $a = -1$, $b = -6$, $c = 2$ értékrendszerből is így adódnak (2) együtthatói:

$$-(a^2 - 2b) = -13 = a_1, \qquad b^2 - 2ac = 40 = b_1, \qquad -c^2 = -2^2 = c_1.$$

Mármost egymás után az (I), (II), (III) egyenlet együttható-hármasa:

$$-(a_1^2 - 2b_1) = -89 = a_{\mathrm{I}}, \qquad b_1^2 - 2a_1c_1 = 1496 = b_{\mathrm{I}}, \qquad -c_1^2 = -2^4 = c_{\mathrm{I}};$$
$$-(a_{\mathrm{I}}^2 - 2b_{\mathrm{I}}) = -4949 = a_{\mathrm{II}}, \qquad -c_{\mathrm{I}}^2 = -2^8 = c_{\mathrm{II}},$$
$$b_{\mathrm{I}}^2 - 2a_{\mathrm{I}}c_{\mathrm{I}} = 2235\,168 \approx 2{,}235 \cdot 10^6 = b_{\mathrm{II}};$$
$$-(a_{\mathrm{II}}^2 - 2b_{\mathrm{II}}) \approx -1{,}982 \cdot 10^7 = A, \quad -c_{\mathrm{II}}^2 = -2^{16} = C,$$
$$b_{\mathrm{II}}^2 - 2a_{\mathrm{II}}c_{\mathrm{II}} \approx 4{,}996 \cdot 10^{12} = B, \quad \text{azaz}$$

(III) $$(x^{16})^3 - 1{,}982 \cdot 10^7(x^{16})^2 + 4{,}996 \cdot 10^{12} \cdot x^{16} - 6{,}554 \cdot 10^4 = 0.$$

Ekkor az állítás szerint, a gyökvonásokat logaritmussal végezve:

$$|x_1| \approx \sqrt[16]{1{,}982 \cdot 10^7} \approx 2{,}858 \qquad (\lg|x_1| \approx 0{,}4561);$$
$$|x_2| \approx \sqrt[16]{\frac{4{,}996 \cdot 10^{12}}{1{,}982 \cdot 10^7}} \approx 2{,}175 \qquad (\lg|x_2| \approx 0{,}3376);$$
$$|x_3| \approx \sqrt[16]{\frac{2^{16}}{4{,}996 \cdot 10^{12}}} \approx 0{,}3216 \qquad (\lg|x_3| \approx 0{,}5074 - 1).$$

A harmadfokú egyenlet gyöktényezős alakját kifejtve

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$
$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0.$$

Eszerint ha x^3 együtthatója 1, akkor az ismeretlent nem tartalmazó tag negatívja egyenlő a gyökök szorzatával, és x^2 együtthatójának negatívja egyenlő a gyökök összegével. Így (1)-ből

$$x_1x_2x_3 = -2 \qquad \text{és} \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

A szorzat szerint vagy 1 gyök negatív, vagy mind a 3, az utóbbi viszont lehetetlen a pozitív összeg miatt. Ezért egyik gyököt próbáljuk negatívnak, éspedig az abszolút értéket is tekintetbe véve x_2-t, így ugyanis jó közelítéssel teljesül:

$$2{,}858 - 2{,}175 + 0{,}322 = 1{,}005 \approx 1.$$

Valóban (1) bal oldalának értéke

$$\text{az } x_1 \approx 2{,}858 \text{ helyen közelítőleg } +0{,}008,$$
$$\text{az } x_2 \approx -2{,}175 \text{ helyen közelítőleg } +0{,}030,$$
$$\text{az } x_3 \approx +0{,}322 \text{ helyen közelítőleg } -0{,}002,$$

így mindegyik közelében gyök várható.

A (3) képletek a gyökök abszolút értékét csökkenő sorrendben adták.

Deák Jenő (Budapest, Kölcsey F. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A fentiekben igen egyszerű példát láttunk (valós együtthatós) algebrai egyenlet (valós) gyökeinek közelítő meghatározására az ún. *Graeffe – Lobacsevszkij*-féle eljárással. Ennek teljes ismertetése messze vezetne, némi tájékoztatásul mégis megemlítjük róla a következőket. 1. A számítást az tette lehetővé, hogy a gyökök abszolút értékben különbözők (ez kizárja a komplex gyökök létezését is). 2. Ezért a gyökök egymás utáni négyzetre emelésével az I–III. egyenletek gyökeinek hányadosai egyre nagyobbak lettek. 3. Fölösleges lett volna tovább menni a 32. hatványokra, (IV) egyenletre, mert az együtthatók számításában A^2 mellett $2B$, valamint B^2 mellett $2AC$ elenyésző, ezért a IV. egyenletből, 32. gyökvonásokkal ugyanezeket a közelítő értékeket kaptuk volna.