Egy $\mathrm{u}(x)$ polinomnak egy $\mathrm{v}(x)$ polinommal való (maradékos) osztásán egy olyan $\mathrm{q}(x)$ hányados-polinom és egy olyan, az osztónál alacsonyabb fokú $\mathrm{r}(x)$ maradék-polinom meghatározását értjük, amelyre teljesül

$$\mathrm{u}(x)=\mathrm{q}(x)\cdot\mathrm{v}(x)+\mathrm{r}(x).$$

Ha $\mathrm{r}(x)$ azonosan 0, akkor azt mondjuk, hogy $\mathrm{u}(x)$ osztható $\mathrm{v}(x)$-szel, más szóval hogy $\mathrm{u}(x)$ többszöröse a $\mathrm{v}(x)$-nek. – Itt csak $\mathrm{r}(x)$-et kell meghatároznunk, ezért az ismert osztási eljárás helyett rüvidebb utat keresünk.

I. Az (1)-beli osztó könnyen szorzattá alakítható:

$$\mathrm{d}(x)=(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^2+1).$$

Az osztás megkönnyítése céljára keressünk olyan egyszerű (azaz kevés tagból álló) polinomokat, amelyek $\mathrm{d}(x)$ egyes tényezőinek többszörösei, majd olyanokat, amelyek magának $\mathrm{d}(x)$-nek többszörösei. Ismert azonosságok szerint

$$\begin{aligned}
x^3-1&=(x^2+x+1)(x-1),\qquad \text{ezért}\\
x^6-1&=(x^3-1)(x^3+1)=(x^2+x+1)(x-1)(x^3+1);\\
x^6+1&=(x^2+1)(x^4-x^2+1),\qquad \text{tehát}\\
(x^6-1)(x^6+1)&=x^{12}-1=\mathrm{d}(x)\cdot(x^4-x^2+1)(x^3+1)(x-1).
\end{aligned}$$

Továbbmenve, ha j pozitív egész szám, $x^{12j}-1$ maradék nélkül osztható $x^{12}-1$-gyel, és így $\mathrm{d}(x)$-szel is; más szóval az $x^{12j}:\mathrm{d}(x)$ osztás maradéka 1.

Mármost $1001=83\cdot 12+5$, ezért

$$\frac{x^{1001}-1}{\mathrm{d}(x)}=\frac{x^{83\cdot 12}\cdot x^5-x^5+x^5-1}{\mathrm{d}(x)}=x^5\cdot\frac{x^{83\cdot 12}-1}{\mathrm{d}(x)}+\frac{x^5-1}{\mathrm{d}(x)}. \tag{3}$$

Az utolsó alak első tagja kifejtve polinomot ad, mert 2. tényezőjében a számláló a fentiek szerint osztható a nevezővel (és mert x^5 is polinom, és két polinom szorzata polinom), ezért a keresett maradék azonos az $(x^5-1):\mathrm{d}(x)$ osztás maradékával. Egy észrevétel alapján ezt az osztást is elkerülhetjük:

$$\begin{aligned}
x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)&=(x-1)(\mathrm{d}(x)-x^2)=\\
&=\mathrm{d}(x)\cdot(x-1)+x^2(1-x),
\end{aligned}$$

itt $x^2(1-x)$ alacsonyabb fokú, mint $\mathrm{d}(x)$, tehát ez a keresett maradék.

II. A (2) osztó $\mathrm{d}(x^2)$, vagyis ugyanazon eljárással számítható ki x^2-ből, amellyel (1) osztója x-ből. Így a fentiek alapján minden pozitív egész j esetén $(x^2)^{12j}-1=x^{24j}-1$ osztható (2)-vel, és mivel $1001=41\cdot 24+17$, ezért a (3)-hoz hasonlóan a második osztás maradéka azonos az $(x^{17}-1):\mathrm{d}(x^2)$ osztás maradékával. Ez a szokásos osztási sémával $-2x^7-x^5-2x^3-1$.

Szeidl László (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)