I. megoldás. Az eredeti természetes számot n-nel jelölve

$$4n = ABCDEF, \tag{1}$$

$$13n = FABCDE, \tag{2}$$

$$22n = CDEFAB. \tag{3}$$

(3) és (1) alapján

$$10^6 > 22n > 5 \cdot 4n > 5 \cdot A \cdot 10^5, \quad \text{azaz} \quad A < 2,$$

ezért $A = 1$ vagy 0.

I. Ha $A = 1$, akkor $n > 10^5/4$, és $n < 10^6/22$, ezeket 13-mal szorozva (2)-ből

$$13 \cdot 10^5/4 = 325\ 000 < F1BCDE < 13 \cdot 10^6/22 = 65 \cdot 10^5/11 < 600\ 000,$$

tehát $3 < F < 6$, és mivel (1) miatt F páros, azért $F = 4$.

Tovább (2)-ből $410\ 000 < 13n < 420\ 000$, ezt 4/13-dal szorozva $126\ 153 < 4n < 129\ 231$, ezért 4n második jegye $B = 2$.

Ezzel ismét (2)-ből $412\ 000 < 13n < 413\ 000$, ezt 22/13-dal szorozva $697\ 230 < 22n < 698\ 924$, ezért $22n$ első három jegye $C = 6$, $D = 9$ és $E = 7$ vagy 8. Végül (1) miatt, utolsó két jegyéből $EF = E4$ osztható 4-gyel, ezért E páros, tehát $E = 8$.

Mármost (1)–(3) bármelyikéből $n_{\mathrm{I}} = 31\ 746$, a kérdéses számokat ezzel osztva
$BCDEFA : n_{\mathrm{I}} = 269\ 841 : 31\ 746 = 8{,}5 = 7/2$,
$DEFABC : n_{\mathrm{I}} = 984\ 126 : 31\ 746 = 31$,
$EFABCD : n_{\mathrm{I}} = 841\ 269 : 31\ 746 = 26{,}5 = 53/2$,
vagyis $BCDEFA$ és $EFABCD$ nem többszöröse az eredeti számnak.

II. Legyen másodszor $A = 0$. (Nem vethetjük el ugyanis annak lehetőségét, hogy a számjegyek (1)–(3)-beli ciklikus ismétlődésének érdekességére tekintettel $4n$-et elöl 0-val kiegészítve írták 6-jegyűnek.) Az előzőkhöz hasonlóan (1)-ből $10^4 < 4n < 10^5$, hiszen $B \neq A$ miatt $B \geqq 1$, ezt 13/4-del szorozva $1 \leqq F \leqq 3$, de F páros, így $F = 2$. Most $13n$ első két jegye alapján $20 \cdot 10^4 < 13n < 21 \cdot 10^4$, ezt 4/13-dal, majd 22/13-dal szorozva $B = 6$, ill. $C = 3$, végül ismét (2)-ből az első négy jegy ismeretében 22/13-dal szorozva $D = 4$, $E = 9$. – Mindezekből $n_{\mathrm{II}} = 15\ 873$, és ezzel mindhárom kérdéses szám osztható, a hányadosok rendre 40, 31, ill. 58.

Mindezek szerint $DEFABC$ az eredeti számnak mindig többszöröse.

Vegyük észre, hogy $n_{\mathrm{I}} = 2 \cdot n_{\mathrm{II}}$, ezért n_{II}-nek az I. esetbeli $BCDEFA = 269\ 841$ szám $2 \cdot 8{,}5 = 17$-szerese, az $EFABCD = 841\ 269$ pedig 53-szorosa.

II. megoldás. (2)-t 10-zel szorozva 130 n hét jegyű, 0-ra végződik és középső öt jegye rendre egyezik $4n$ első öt jegyével. Kivonással ezek a jegyek kiesnek:

$$130n - 4n = 126n = 10^6 F - F = 999\ 999\ F, \tag{4}$$

és 63-mal osztva $2n = 15\ 873\ F$. Ebből egyrészt F páros, másrészt $22n = 174\ 603\ F < 10^6$, ezért $F < 6$, tehát $F = 2$ vagy 4 (nem lehet $F = 0$, mert $13n > 4n$, és így $F > A$). F értéke meghatározza n-et és vele a többi számjegyeket. $F = 2$-ből a fenti II. esetre, $F = 4$-ből pedig az I. esetre jutunk.

Csernátony Csaba (Budapest, I. László g. IV. o. t.)
dolgozatából, kiegészítéssel