I. megoldás. Két önmagában is érdekes segédtételt használunk majd föl, előbb ezeket bizonyítjuk.

I. segédtétel: Az a, b, c pozitív számok reciprokainak összege nem kisebb számtani közepük reciprokának 3-szorosánál.

A két pozitív szám számtani és mértani közepére ismert egyenlőtlenség szerint

$$a+b\geq 2\sqrt{ab},\quad a+c\geq 2\sqrt{ac},\quad b+c\geq 2\sqrt{bc}. \tag{1}$$

Ezek szorzatához mindkét oldalon abc-t adva, a bal oldal szorzattá alakítható:

$$(a+b)(a+c)(b+c)+abc=(ab+ac+bc)(a+b+c)\geq 9abc,$$

és innen osztással

$$\frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}=3\cdot\frac{1}{(a+b+c)/3}, \tag{2}$$

amit bizonyítani akartunk.

II. segédtétel: Az a, b, c pozitív számok négyzetösszege nem kisebb összegük négyzetének 3-adrészénél.

Alkalmazzuk az (1)-ben fölhasznált tételt az a^2, b^2, c^2 számokra:

$$a^2+b^2\geq 2ab,\quad a^2+c^2\geq 2ac,\quad b^2+c^2\geq 2bc, \tag{3}$$

összeadással

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc;$$

így pedig

$$(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+ac+bc)\leq 3(a^2+b^2+c^2), \tag{4}$$

ami állításunkat bizonyítja.

Föltevésünk alapján utóbbi eredményünk így írható:

$$a+b+c\leq\sqrt{3}. \tag{5}$$

Mostmár (5)-öt fölhasználva (2)-ből

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}\geq\frac{9}{\sqrt{3}}=\sqrt{27}>\sqrt{16}=4, \tag{6}$$

amit bizonyítanunk kellett.

A szóban forgó 4-es alsó korláton túlmenve egy nagyobb alsó korlátot találtunk a $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ számban a, b, c reciprokainak összegére, a feladat állítását élesítettük. További élesítés már nem lehetséges, mert amennyiben (1)-ben és (3)-ban mind a három helyen egyenlőség áll, vagyis ha $a=b=c$, akkor (2)-ben és (4)-ben, és ennélfogva (5)-ben és (6)-ban is a $\geq$ jelek közül az egyenlőség érvényes.

Balogh József (Hatvan, Bajza J. g. III. o. t.)

II. megoldás. Cseréljük fel három számunk jelölését úgy – ha kell –, hogy álljon $a\geq b\geq c$. Ekkor

$$a^2\geq b^2\geq c^2>0,\quad \text{így}$$

$$1=a^2+b^2+c^2\geq c^2+c^2+c^2=3c^2,\quad \text{amiből}\quad \frac{1}{c}\geq\sqrt{3}>1{,}7,$$

$$1=a^2+b^2+c^2>a^2+b^2\geq 2b^2,\quad \text{amiből}\quad \frac{1}{b}>\sqrt{2}>1{,}4,$$

$$1>a^2,\quad \text{amiből}\quad \frac{1}{a}>1,\quad \text{és így}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>4{,}1>4.$$

Faragó Tibor (Budapest, Bláthy O. t. III. o. t.)

Megjegyzés. (2) így is írható:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{1}{\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}}.$$

A jobb oldalon az a, b, c pozitív számuk reciprokai számtani közepének reciproka áll. Ezt szokás az a, b, c, számok *harmonikus középérték*ének nevezni. Eszerint három szám H harmonikus közepe kisebb A számtani (aritmetikai) közepüknél vagy egyenlő vele: $H \leq A$. Egyenlőség csak $a = b = c$, esetén áll fenn.

(4) így írható:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

A bal oldali kifejezést az a, b, c számok *négyzetes* (quadratikus) *középérték*ének nevezik. Eszerint három pozitív szám Q négyzetes középértéke nem kisebb aritmetikai közepüknél: $Q \geq A$. Egyenlőség csak $a = b = c$ esetén áll fenn.