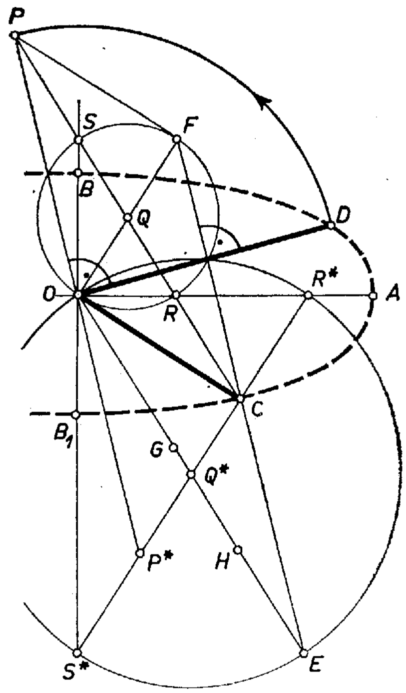
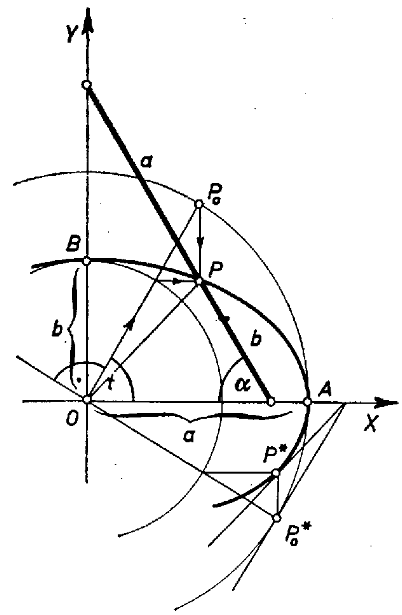
**I. megoldás.** Elég azt megmutatnunk, hogy a leírt eljárás az ellipszis tengelyeinek egyeneseire és hosszára ugyanazt a két egyenest és két hosszúságot adja, mint az ábrázoló geometriából [1] ismert *Rytz*-féle szerkesztés, amely ugyancsak egy konjugált félátmérő-párból állítja elő a tengelyek egyeneseit és fele hosszúságukat, ugyanis az utóbbi eljárás helyessége ott bizonyítást nyert.




Forgassuk el $D$-t $O$ körül $90^\circ$-kal, legyen új helyzete $P$, a $PC$ szakasz felezőpontja $Q$, messe $CP$-t a $Q$ körül $QO$ sugárral írt kör $R$-ben és $S$-ben. Ekkor a *Rytz*-eljárás szerint a két tengely egyenese $OR$ és $OS$, hosszuk fele pedig $PR(=CS)$, ill. $PS(=CR)$. ($P^*$, $Q^*$, $R^*$, $S^*$ a másik irányú forgatás útján ugyanúgy keletkeznek.)

A két eljárás lépéseit egyszerre figyelembe véve $OCFP$ és $OECP$ paralelogrammák, így egyrészt $Q$ az $OF$ átlót is felezi, másrészt $OE \parallel CP$. Így az $OQR$ háromszög egyenlő szárú voltát is felhasználva

$$FOR\sphericalangle = QOR\sphericalangle = QRO\sphericalangle = EOR\sphericalangle,$$

tehát $OR$ azonos az $OE$, $OF$ egyenespár egyik szögfelezőjével; $OS$ pedig a köztük levő másik szöget felezi, mert Thalész tétele szerint merőleges $OR$-re. –Továbbá a jelölést úgy választva, hogy $OE > OF$,

$$GH = \frac{GE}{2} = \frac{OE - OG}{2} = \frac{CP - OF}{2} = CQ - OQ = CQ - RQ = CR,$$
$$OH = OG + GH = OF + CR = RS + CR = CS.$$

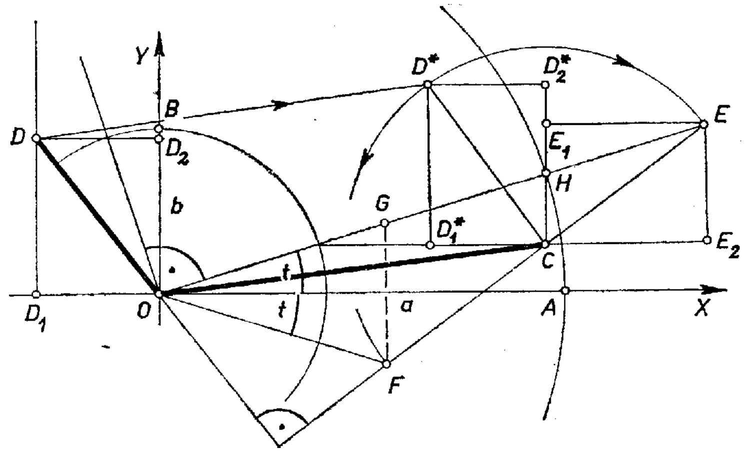
Végül $OR$ és $OS$ közül a nagytengely kiválasztására a két eljárás ugyanazt az utasítást adja. Ezzel az eljárás helyességét bebizonyítottuk.

*Kalmár István* (Debrecen, Fazekas M. Gimn. IV. o. t.)

**II. megoldás.** Ismeretes a tankönyvből [2], hogy az $OA = a$ fél nagytengellyel és $OB = b$ fél kistengellyel meghatározott ellipszis I. síknegyedbeli ívének paraméteres egyenletrendszere $x = a\cos\alpha$, $y = b\sin\alpha$ (2. ábra). Könnyű belátni, hogy az $AOP_0 = t$ szöget véve paraméternek az $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ egyenletrendszer az ellipszis minden pontját megadja, míg $0^\circ \le t < 360^\circ$. Ezt a rendszert fogjuk felhasználni.

Az ellipszis két konjugált félátmérőjének végpontja $t$-nek két egymástól $90^\circ$-kal különböző értékéhez tartozik, [3] mert így lesz a főkör $P_0^*$-beli érintője párhuzamos $OP_0$-lal, és a $P^*$-beli érintő párhuzamos $OP$-vel.

[1] Lásd pl. *Lőrincz Pál:* Ábrázoló geometria a gimn. IV. o. számára, 6. kiadás, Bp. 1962, Tankönyvkiadó, 45–46. o.
[2] *Gallai T.–Hódi E.–Péter R.–Szabó P.–Tolnai J.:* Matematika a Gimn. III. o. sz. 12. kiadás, Bp. 1962, Tankönyvkiadó, 264. o.
[3] Lásd a [2] tankönyvben, 41–42. o.




Így a feltevés szerint van olyan $OX$, $OY$ egymásra merőleges koordináta-tengelypár és olyan $a$, $b$, $t$ értékrendszer, hogy $C$ és $D$ koordinátái (3. ábra)

$$C(a\cos t,\ b\sin t),\qquad D(-a\sin t,\ b\cos t),$$

ugyanis $\cos(t+90^\circ)=-\sin t$, és $\sin(t+90^\circ)=\cos t$.

Az $E$ pont előállítását így is kimondhatjuk: $OD$-t áttoljuk a $CD^*$ helyzetbe, majd $C$ körül elforgatjuk $90^\circ$-kal. Ekkor, az előjeleket is figyelembe véve

$$CE_2=CD_2^*=OD_2=b\cos t,\qquad CE_1=-OD_1=a\sin t,$$

ugyanis a felhasznált irányú forgatással $Y$ pozitív felének iránya jut $X$ pozitív felének irányába és $X$ negatív felének iránya az $Y$ pozitív felének irányába. Eszerint $E$ koordinátái, és hasonlóan $F$-éi, $CD^*$ ellentétes irányú $90^\circ$-os forgatásával

$$E(a\cos t+b\cos t,\ b\sin t+a\sin t)=\big((a+b)\cos t,\ (a+b)\sin t\big),$$
$$F\big((a-b)\cos t,\ (b-a)\sin t\big)=\big((a-b)\cos(360^\circ-t),\ (a-b)\sin(360^\circ-t)\big).$$

Az utolsó alakokban az $a+b$ és $a-b$ tényezők, valamint a $t$ és $360^\circ-t$ paraméter értékek megismétlődése azt mutatja, hogy az $OE$ és $OF$ egyenesek egymás tükörképei az $X$ tengelyre, tehát egyik szögfelezőjük valóban az $X$ tengely, az erre merőleges, másik szögfelezőjük pedig az $Y$ tengely, amint a feladat állítja.

Így már azt is mondhatjuk, hogy $G$ az $F$ tükörképe az $X$ tengelyre, tehát $G$, majd $H$ koordinátái:

$$G\big((a-b)\cos t,\ (a-b)\sin t\big),\qquad H(a\cos t,\ a\sin t).$$

Innen pedig nyilvánvaló, hogy $OH=a$, $OG=a-b$, és így $GH=b$.