I. megoldás. Legyenek egy tetszés szerinti háromjegyű természetes szám egymás utáni számjegyei A, B, C, ahol $1 \le A \le 9$, és $0 \le B, C \le 9$. A számnak és számjegyei összegének q hányadosa így alakítható:

$$q = \frac{100A + 10B + C}{A + B + C} = 1 + 9 \cdot \frac{11A + B}{A + B + C} \ge 1 + 9 \cdot \frac{11A + B}{A + B + 9}.$$

A második alakbeli tört helyére kisebb vagy vele egyenlő értékű kifejezést írtunk azáltal, hogy C helyére legnagyobb lehetséges értékét téve a nevezőt növeltük, vagy változatlanul hagytuk. Ezt megismételjük B-vel:

$$\begin{aligned} q &\ge 1 + 9 \cdot \frac{A + B + 9 + 10A - 9}{A + B + 9} = 10 + 9 \cdot \frac{10A - 9}{A + B + 9} \ge \\ &\ge 10 + 9 \cdot \frac{10A - 9}{A + 18}, \end{aligned}$$

ugyanis a számláló pozitív. Továbbmenve

$$\begin{aligned} q &\ge 10 + 9 \cdot \frac{10(A + 18) - 189}{A + 18} = 100 - \frac{9 \cdot 189}{A + 18} \ge \\ &\ge 100 - \frac{9 \cdot 189}{19} = \frac{199}{19}. \end{aligned}$$

Itt a kivonandót növeltük vagy változatlanul hagytuk azáltal, hogy nevezőjét csökkentettük vagy változatlanul hagytuk. A helyére legkisebb szóba jövő értékét, 1-et írva.

Ezek szerint a vizsgálandó hányados sohasem kisebb, mint

$$\frac{199}{19} = \frac{199}{1 + 9 + 9},$$

és ezt eléri, ha a 199 számból indulunk ki.

Domokos László (Tatabánya, Árpád g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Az alábbi átalakítások mutatják, hogy a legkisebb q-t adó szám jegyeit tetszés szerinti sorrendben megállapíthatjuk:

$$q = 100 - \frac{90B + 99C}{A + B + C} = 10 + \frac{90A - 9C}{A + B + C} = 1 + \frac{99A + 9B}{A + B + C}.$$

Kloknicer Imre (Budapest, Bláthy O. t. III. o. t.)

II. megoldás. Egy $x = 100A + 10B - C(> 100)$ háromjegyű számot számjegyeinek $y(> 1)$ összegével osztva a hányados csökken, ha a számban akár a tízes, akár az egyes jegyet 1-gyel növeljük, akár a százas jegyet 1-gyel csökkentjük (a másik két jegyet mindegyik esetben változatlanul hagyjuk):

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} - \frac{x + 10}{y + 1} &= \frac{x - 10y}{y(y + 1)} = \frac{9(10A - C)}{y(y + 1)} > 0, \\ \frac{x}{y} - \frac{x + 1}{y + 1} &= \frac{x - y}{y(y + 1)} = \frac{99A + 9B}{y(y + 1)} > 0, \\ \frac{x}{y} - \frac{x - 100}{y - 1} &= \frac{100y - x}{y(y - 1)} = \frac{90B + 99C}{y(y - 1)} \ge 0, \end{aligned} \tag{1}$$

ugyanis $10A \ge 10 > C$. A tízes és az egyes jegy csak a $B = 9$, ill. $C = 9$ érték eléréséig növelhető, a százas jegy pedig csak $A = 1$-ig csökkenthető, és B, $C > 0$ esetén (1)-ben nem áll egyenlőség. A változtatásokat egymás után végrehajtva a 199 számhoz jutunk, az erre adódó 199/19 hányados már nem csökkenthető, másrészt a vizsgálatból kihagyott $x = 100$, $y = 1$ esetében is nagyobb hányadost kapunk, tehát 199/19 a kérdéses hányados legkisebb értéke.

Babai László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)