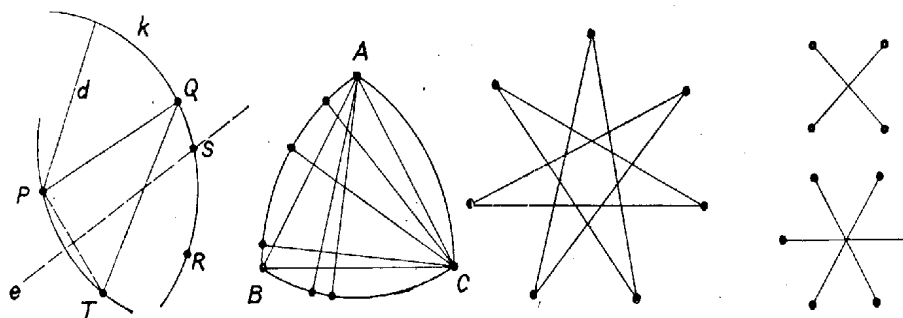


Nevezzük minden egyes pont rendszámának az oda befutó átmérők számát. Ha nincs 2-nél nagyobb rendszámú pont, akkor az állítás igaz, hiszen így az átmérővégződések összes száma legfeljebb  $2n$ , és minden átmérő 2 pontba fut be.



Tegyük fel, hogy az adottak közül való  $P$  pont rendszáma nagyobb 2-nél. Ekkor minden ide befutó átmérő másik végpontja a  $P$  körüli  $d$  sugarú  $k$  körön van, és egy adott pont sem fekszik  $k$ -n kívül. Legyen  $QR$  a  $k$ -nak az a legrövidebb íve, amely az összes végpontokat tartalmazza, ekkor  $Q$  és  $R$  az adott pontok közül valók, és  $QR \leq d$ . Feltevésünk szerint van az ív belsejében legalább egy  $S$  pont az adott pontok közül. Állítjuk, hogy minden ilyen belső  $S$  pont rendszáma 1. Valóban, ellentmondásra jutunk azt feltéve, hogy  $ST$  egy, az  $SP$ -től különböző átmérő. Ekkor ugyanis  $PT$ -nek ( $S$ -en átmenő)  $e$  felező merőlegese elválasztja egymástól  $Q$ -t és  $R$ -et, és ha ezek közül  $Q$  van  $e$ -nek a  $P$ -t tartalmazó partján, akkor  $QT > QP = d$ , ami lehetetlen. ( $e$  csak akkor nem választaná el  $Q$ -t  $R$ -től, ha  $S$ -en kívül még egyszer metszené a mondott  $QR$  ívet; ekkor azonban  $T$  kívül esnék a  $k$ -n, ami lehetetlen.) – Ezek szerint a pontrendszer minden 2-nél nagyobb rendszámú pontjából legfeljebb 2 átmérő megy olyan pontba, melynek rendszáma nagyobb 1-nél.

Hagyjuk el most átmenetileg a 2-nél kisebb rendszámú pontokat. Evvel a belőlük kiinduló átmérők is – ha egyáltalán vannak – elmaradnak, és bármelyik megmaradó pontból legfeljebb 2 átmérő indul ki, tehát e szűkített pontrendszerre az állítás helyes, az átmérők száma nem nagyobb a pontok számánál. Visszavéve az 1 vagy 0 rendszámú pontokat, minden ponttal együtt legfeljebb 1 átmérőt veszünk vissza, tehát az állítás igaz marad.

Bármely szóba jövő  $n$  esetére megadható  $n$  átmérőt tartalmazó pontrendszer. Ilyet alkot pl. egy  $ABC$  szabályos háromszög 3 csúcsa és  $n - 3$  olyan pont, amely  $A, B, C$  egyikétől  $AB$ -vel egyenlő, a másik kettőtől pedig kisebb távolságra van. A szabályos  $n$ -szög csúcsai rendszerének  $n = 2k + 1$  esetén ugyancsak  $n$  átmérője van,  $n = 2k$  esetén viszont csak  $n/2$  a számuk, és minden pont rendje 2, ill. 1.

Havas János (Budapest, Berzsenyi D. g. III. o. t.)