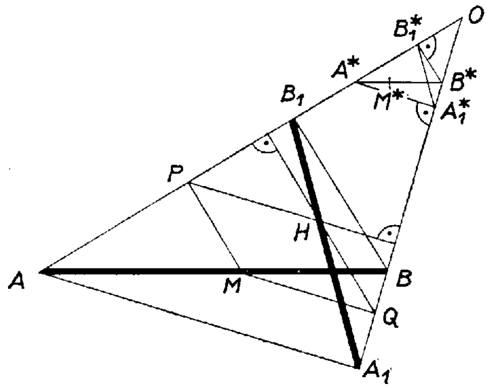
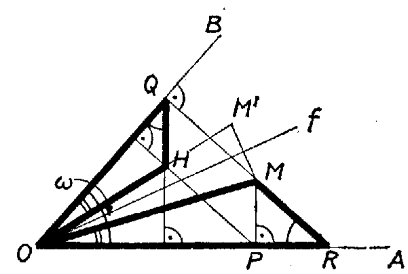
I. megoldás. *a)* Megmutatjuk, hogy ha M befutja az AB szakaszt, akkor H befutja az OAB háromszög AA_1 és BB_1 magasságainak talppontja közti A_1B_1 szakaszt. Ez nyilvánvaló, ha pl. a BAO szög derékszög, és így az OPQ háromszög P-ből húzott magassága azonos AA_1-gyel. $BAO\sphericalangle \neq 90^\circ$ esetén a P-ből húzott magasság párhuzamos AA_1-gyel, ezért az A_1B_1 szakaszt mindig AP/PB_1 arányban osztja ketté, és ez az arány egyenlő AM/MB-vel, mert $MP \parallel BB_1$. Hasonlóan a Q-ból húzott magasság – mivel párhuzamos BB_1-gyel – az A_1B_1 szakaszt mindig $A_1Q/QB = AM/MB$ arányban osztja ketté, hiszen $MQ \parallel AA_1$. Eszerint a P-ből és Q-ból húzott magasság az A_1B_1 szakaszt ugyanazon pontban metszi, és ez a pont H, mint az OPQ háromszög két magasságának közös pontja. – Amikor pedig M az A-ban, ill. B-ben van, akkor H nyilván A_1-ben, ill. B_1-ben adódik.





Az A_1B_1 szakasz bármely H pontját megkapjuk magasságpontként, éspedig az AB szakaszt $AM/MB = A_1H/HB_1$ arányban osztó M pontból indulva ki. Ezt megkaphatjuk pl. úgy, hogy a H-ból OB-re állított merőlegesnek OA-val való P metszéspontjában az OA-ra állított merőlegessel metsszük AB-t. – Ezek szerint az *a)* esetben H mértani helye az A_1B_1 szakasz (a végpontjait is hozzászámítva).

b) A fentiekből adódik, hogy ha M befutja az OAB háromszög belsejét, akkor H mértani helye az OA_1B_1 háromszög belseje. Messe ugyanis az M^*-on átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes az OA, OB szakaszokat A^*-ban, ill. B^*-ban, akkor az OA^*B^* háromszög előáll az OAB-ből $OA^* : OA = k < 1$ arányú hasonlósági transzformációval, ezért míg M^* befutja az A^*B^* szakaszt, addig a hozzá tartozó H^* befutja az $A^*A_1^*$, $B^*B_1^*$ magasságszakaszok talppontjai közti $A_1^*B_1^*$ szakaszt (a végpontokat most már mindkét szakaszból kizárva), ez a szakasz pedig az A_1B_1 szakasz k arányú transzformáltja az O középpontra nézve, tehát benne van az OA_1B_1 háromszögben.

Az OA_1B_1 háromszög tetszés szerinti H^* pontjához úgy kapható meg az az M^*, amelyből visszajutunk H^*-hoz, hogy H^*-on át párhuzamost húzunk A_1B_1-gyel, ez metszi ki az A_1^*, B_1^* pontot, az ezekben felállított magasság A^*-ot, ill. B^*-ot, ekkor M^* a fentiekhez hasonlóan adódik az A^*B^* szakaszon. – Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Argyelán János (Veszprém, Vegyip. t. IV. o. t.)

II. megoldás. Legyen M az AOB szögtartomány tetszés szerinti belső pontja, és messe a feladat szerinti QM egyenes az OA szárt R-ben. Így $OQH\sphericalangle = ORM\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek. Másrészt az OQR és MPR háromszögek hasonlósága és $MPHQ$ paralelogramma volta miatt

$$OQ : OR = MP : MR = HQ : MR,$$

ezért az OQH és ORM háromszögek hasonlók, $HOQ\sphericalangle = MOR\sphericalangle$, és megfelelő oldalaik aránya

$$OH : OM = OQ : OR = \cos\omega,$$

ahol $\omega = AOB\sphericalangle$.

Eszerint H-t úgy is megkaphatjuk M-ből, hogy ezt tükrözzük az AOB szög f felező egyenesére, majd a kapott M' pontra O középpontú és $\cos\omega$ arányú hasonlósági transzformációt alkalmazunk. – Ez nyilvánvalóan akkor is helyes, ha M az AOB szögtartomány határán van.

Mind a tükrözés, mind a hasonlósági transzformáció szakaszt szakaszba, háromszögtartományt háromszögtartományba visz át, ezért ha M befutja az AB szakaszt, ill. az OAB háromszög belsejét, úgy H az A_1B_1 szakaszt, ill. az OA_1B_1 háromszög belsejét futja be, ahol A_1, B_1 az A, ill. B pontnak a fenti módon megszerkesztett képe, vagyis az A-ból OB-re, ill. B-ből OA-ra bocsátott merőleges talppontja.