I. megoldás. Egyik x_i sem lehet 0, mert könnyen látható, hogy akkor a többi csak 2 lehetne, de akkor $0+2\cdot 2\cdot 2\neq 2$. Jelöljük az $x_1x_2x_3x_4$ szorzatot y-nal, ekkor az

$$x_i+\frac{y}{x_i}=2 \qquad (i=1,\,2,\,3,\,4) \tag{1}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Innen

$$x_i^2-2x_i+y=0,\ x_i=1\pm\sqrt{1-y},\ \text{másképpen}\ |x_i-1|=\sqrt{1-y},$$

eszerint az ismeretleneket 1-gyel csökkentve legföljebb két különböző számot kaphatunk. Ez háromféleképpen adódhat:

α) mind a négy x_i-1 különbség értéke egyenlő,
β) hármuk egyenlő, a negyedik -1-szer akkora,
γ) kettőjük egyenlő, a másik kettőjük -1-szer akkora.

Az α esetben $x_1=x_2=x_3=x_4$, ezért (1)-ből

$$x_1+x_1^3=2,\quad x_1^3+x_1-2=(x_1-1)(x_1^2+x_1+2)=0,$$

és mivel a második tényező minden valós x_1 értékre pozitív:

$$x_1^2+x_1+2=\left(x_1+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\geqq\frac{9}{4}>0,$$

azért csak $x_1=1$ lehetséges. Az 1, 1, 1, 1 számnégyes valóban kielégíti a követelményeket.

A β esetben pl. $x_1-1=x_2-1=x_3-1$, és így $x_1=x_2=x_3$, továbbá $x_4-1=1-x_1$. Így $x_4=2-x_1$, ezért (1)-ből $i=4$ esetén

$$2-x_1+x_1^3=2,\qquad x_1(x_1^2-1)=0,$$

és mivel $x_1\neq 0$, x_1 értéke 1 vagy -1. Az első az előbbi megoldásra vezet, az utóbbi pedig a -1, -1, -1, 3 számnégyesre, ami szintén valóban megoldás.

A γ esetben pl. $x_1-1=x_2-1=1-x_3=1-x_4=x_4$, azaz $x_1=x_2$, és $x_3=x_4=2-x_1$, így pedig (1)-ből $i=3$ esetén

$$2-x_1+x_1^2(2-x_1)=2,\qquad x_1(x_1-1)^2=0,$$

csak az 1, 1, 1, 1 megoldást kapjuk.

Mindezek szerint a követelménynek két valós számnégyes felel meg: 1, 1, 1, 1 és -1, -1, -1, 3.

Lőrincz János (Sárospatak, Rákóczi F. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Olyan megoldás, amelyben $x_1=x_2=x_3=x_4$, egy van, mint az előző megoldásban láttuk: $x_1=x_2=x_3=x_4=1$. Ha a számok között van különböző, akkor van olyan, amelyik legalább két másiktól különbözik. Válasszuk a sorszámozást úgy, hogy $x_1\neq x_2$, $x_1\neq x_3$ teljesüljön. Írjuk fel a követelményt x_1-ből és x_2-ből kiindulva, majd képezzük a két egyenlőség különbségét:

$$x_1+x_2x_3x_4=2,\qquad x_2+x_1x_3x_4=2, \tag{2}$$

$$x_1-x_2+x_3x_4(x_2-x_1)=(x_1-x_2)(1-x_3x_4)=0. \tag{3}$$

Hasonlóan

$$(x_1-x_3)(1-x_2x_4)=0. \tag{4}$$

Ekkor (3)-ból és (4)-ből $x_3x_4=1$, és $x_2x_4=1$, ezért (2)-ből $x_1+x_2=2$, és $x_1+x_3=2$, tehát $x_2=x_3$.

Az x_4-ből kiindulva adódó $x_4+x_1x_2x_3=2$ egyenletből x_1-et, x_3-at, x_4-et könnyen kiküszöbölhetjük, ha x_2-vel szorzunk:

$$x_2x_4+x_1x_2^2x_3=1+(2-x_2)x_2^3=2x_2,\qquad x_2^4-2x_2^3+2x_2-1=0,$$
$$x_2^4-1-2x_2(x_2^2-1)=(x_2^2-1)(x_2^2+1-2x_2)=(x_2-1)^3(x_2+1)=0.$$

Innen vagy $x_2=x_3=1$, $x_1=2-x_2=1$, $x_4=1/x_2=1$, ami nem tartalmaz különböző értékeket, vagy $x_2=x_3=-1$, $x_4=1/x_2=-1$, $x_1=2-x_2=3$, és ez valóban kielégíti a követelményeket.