

Jelöljük a metszéspontokat P_1, \dots, P_M -mel, az egyeneseket e_1, \dots, e_n -nel úgy, hogy P_i rendje r_i legyen ($i = 1, \dots, M$) és e_j -n R_j darab P_i pont legyen.

Vegyük észre, hogy $c)$ -ből és $f)$ -ből következik, hogy

$$(g) \quad M \geq n$$

és fordítva is, $c)$ -ből és $g)$ -ből következik $f)$. Ugyancsak következik $c)$ -ből, $d)$ -ből és $g)$ -ből $e)$, így elég az $a) - d)$ és $g)$ állításokat igazolni.

I. Egy e_j egyenesen végighaladva számoljuk össze kétféleképpen, hány egyenest lépünk át. Egyrészt átlépjük a többi egyenesek mindegyikét egyszer, tehát $n - 1$ egyenest, másrészt az egyes egyeneseken minden P_i pontban $r_i - 1$ egyenest lépünk át. Eszerint az egy egyenesen levő P_i pontokra az $r_i - 1$ értékek összege $n - 1$.

$a)$ Megállapításunkból következik, hogy az egy egyenesen levő P_i -kre az $r_i - 1$ -ek közt a páratlanok – vagyis az egyenesen levő páros rendű pontok száma – páros, ha $n - 1$ páros, vagyis ha n páratlan, és a mondott szám páratlan, ha n páros.

$b)$ A fenti megszámlálást minden egyenesen elvégezve egyrészt $n(n - 1)$ átlépést számlálunk, ez áll $b)$ jobb oldalán; másrészt minden P_i ponton r_i -szer haladunk át és minden alkalommal $r_i - 1$ átlépést, tehát összesen $r_i(r_i - 1)$ átlépést számolunk össze, tehát pontok szerint számolva össze $b)$ bal oldalát kapjuk. Ezzel az összefüggést igazoltuk.

$c)$ Most számoljuk össze az egyes egyenesek mentén levő P_i pontokat. Minden egyenesen végigmenve éppen $c)$ bal oldalát kapjuk. Másrészt egy P_i pontot minden rajta átmenő egyenesen számba vettünk egyszer, összesen tehát r_i -szer számoltuk. Így pontok szerint csoportosítva a jobb oldalt kapjuk. Ezzel ezt az egyenlőséget is igazoltuk.

Idáig nem használtuk fel azt a feltevést, hogy nem halad át egy közös ponton minden egyenes, az $a) - c)$ állítás tehát erre az esetre is érvényes (csak triviális).

$d)$ és $g)$ igazolásához szükségünk van arra a segédtétele, hogy ha az egyenesek nem egy ponton mennek keresztül, akkor van olyan metszéspont, mondjuk P_M , amire $r_M = 2$. Ebből a két állítás az alábbiak szerint következik.

$d)$ Legyen a P_M -en átmenő egyenes e_1 és e_2 . Megszámolva e_1 -en és e_2 -n az egyenes-átlépések számát és hozzászámolva még a metszéspontok számát is P_M kivételével, egyrészt $2(n - 1) + M - 1$ -et kapunk, ami az összefüggés jobb oldala. Másrészt P_M -et $2 = r_M$ -szer vettük számításba (mind e_1 -en, mind e_2 -n egy átlépés történt P_M -ben), az e_1 -en és e_2 -n levő P_i -k mindegyikében $r_i - 1$ átlépést számoltunk és egyszer a pontot számba vettük, így ezek a pontok r_i -vel járultak az összeghez; egy sem e_1 -en, sem e_2 -n nem levő P_i pont pedig, ha van ilyen, 1-szer van számba véve, vagyis kevesebbszer, mint a rendje. Ezzel az egyenlőtlenséget igazoltuk.

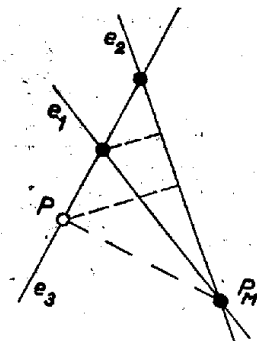
Azt is látjuk, hogy $d)$ -ben akkor és csak akkor áll fenn egyenlőség, ha nincs metszéspont a fenti e_1, e_2 egyenespáron kívül. Könnyű belátni, hogy ez csak úgy lehetséges, ha egyikükön – mondjuk e_2 -n – csak egy a P_M -től különböző metszéspont van, ezen minden egyenes átmegegy, kivéve e_1 -et, továbbá azt is, hogy ekkor $M = n$.

$g)$ Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. 3 egyenes esetén $M = n = 3$. Tegyük fel, hogy $n - 1$ egyenesre igaz az állítás és vegyünk a feltételeknek megfelelő n egyenest, ezeknek egy másodrendű P_M metszéspontját, melyen átmegegy az e_1 egyenes. Elhagyva e_1 -et, P_M megszűnik metszéspont lenni és minden további, az e_1 -en levő másodrendű metszéspont is, ha van ilyen. Így a megmaradó egyenesek metszéspontjainak M' száma legfeljebb $M - 1$. Ha a megmaradó egyenesek egy ponton mennek keresztül, akkor nyilván e_1 -gyel elmetszve őket összesen $M = n$ metszéspont lesz. Ha nem mennek mind át egy ponton, akkor érvényes rájuk az állítás, vagyis

$$M - 1 \geq M' \geq n - 1, \quad \text{amiből} \quad M \geq n.$$

Így $g)$ igaz akárhány egyenesre.

II. Bebizonyítjuk a $d)$ és $g)$ igazolásában felhasznált segédtelet, vagyis hogy feltevéseink mellett van olyan metszéspont, melynek rendje 2, más szóval amely az adott n egyenes közül pontosan kettőn van rajta.¹ Tekintsük mindegyik e_j távolságát mindegyik olyan P_i -től, mely nincs rajta. Legyen e távolságok legkisebbike – az indexeket alkalmasan választva – e_3 távolsága P_M -től. Ekkor P_M -en két e_j megy át.



¹A segédtelet rokon Gallai Tibor következő tételével: „legyen adva a síkban n pont, melyek nincsenek mind egy egyenesen, ekkor van olyan egyenes, mely ezen n pont közül pontosan kettőn megy át” – és ebből a tételből segédteletünk az „egyenes” és „pont”, továbbá „metszés” és „összekötés” szó-párok egymással való kicserélése (és a szükségessé váló stiláris módosítások) útján keletkezik. Két ilyen tételt egymás duálisának mondunk.

Legyen ugyanis P a P_M -ből e_3 -ra bocsátott merőleges talppontja. Ha P_M -en három e_j menne át, akkor P valamelyik oldalán legalább két ilyen egyenes metszené e_3 -at, legyenek ezek e_1 és e_2 úgy, hogy e_1 a $P_M P$ és e_2 egyenes közti hegyesszög-tartományban halad; esetleg e_1 egybeesik $P_M P$ -vel. Ekkor e_2 távolsága e_1 és e_3 metszéspontjától kisebb lenne, mint $P_M P$, hiszen nem lehetne nagyobb, mint az e_3 , $P_M P$ és e_2 egyenesekkel meghatározott derékszögű háromszögnek az átfogóra merőleges magassága, $P_M P$ viszont nagyobb ennél. Ezek szerint P_M -en valóban nem mehet át 2-nél több e_j .

Megjegyzések. 1. Fent csak g)-t bizonyítottuk teljes indukcióval. Ugyanígy bizonyíthatók az előző állítások is. Érdekes, hogy d) teljes indukciós bizonyítása nem használja fel a fenti mélyebb segédtelet.

2. Meg lehet mutatni, hogy $M = n$ csak a mondott speciális alakzatra teljesül. g) helyett a következő élesebb állítás is bizonyítható teljes indukcióval: $M > n$, kivéve ha elhagyható egy egyenes úgy, hogy a többi egy ponton menjen keresztül, ekkor $M = n$.

Ha $n = 3$, akkor csak a kivételes eset állhat elő, bármelyik egyenes lehet az elhagyandó. A kivételes esetben nyilvánvalóan $M = n$. Legyen most $n > 3$, $n - 1$ -re legyen igaz az állítás, legyen n egyenesünk, amely megfelel a feltételeknek és nem a kivételes esetet mutatja. A segédtelet szerint van olyan e_1 egyenes, amelyen van másodrendű pont. Ha e_1 elhagyása után sem a kivételes eset áll elő, akkor $M - 1 \geq M' > n - 1$, s így $M > n$. Ha a kivételes eset jön létre, akkor e_1 nem mehet át olyan metszésponton, amin rajta kívül $n - 2$ egyenes megy át, de ekkor legalább 2 egyenest metsz olyan pontban, amin harmadik egyenes nem megy át, s így $M - 1 > M' = n - 1$, tehát $M > n$. Az élesebb állítás is igaz tehát akárhány egyenesre.