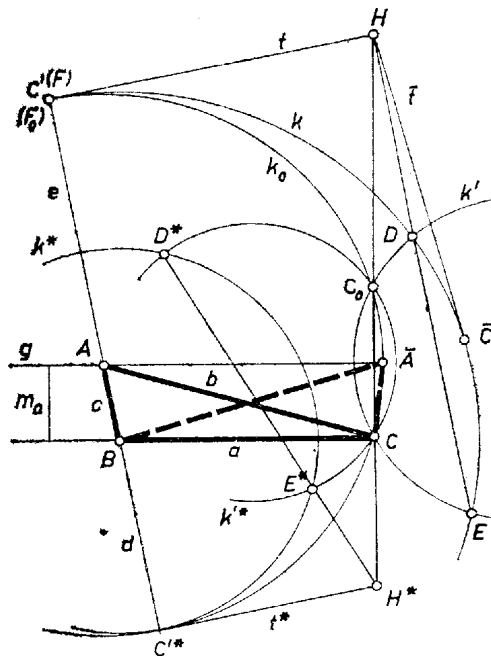


**I. megoldás.** I. Tekintsük először a *két oldal összegének esetét*, legyen  $ABC$  a keresett háromszög,  $BC = a$  az adott oldal,  $m_a$  az adott magasság, és  $BA + AC = c + b = e$ , az adott összegszakasz (1. ábra). Forgassuk rá  $C$ -t az  $A$  körüli  $k_0$  körrel  $BA$ -nak  $A$ -n túli meghosszabbítására a  $C'$  pontba, ekkor  $C'$  a  $B$  körüli  $e$  sugarú  $k$  körön is rajta van, és  $k$  a  $C'$ -ben érinti  $k_0$ -t. Továbbá rajzoljuk meg az  $A$ -n átmenő,  $BC$ -vel párhuzamos  $g$  egyenest, ez szimmetriatengelye  $k_0$ -nak, így  $k_0$  átmege  $C$ -nek  $g$ -re való  $C_0$  tükörképén is.



1. ábra

Mint hogy a  $BC$  alapot felvéve  $k$ ,  $g$  és  $C_0$  megszerkeszthetők, a feladatot visszavezettük a  $k$ -t érintő és a  $C$ ,  $C_0$  pontokon átmenő  $k_0$  kör megszerkesztésére, ennek középpontja lesz a hátra levő  $A$  csúcs.  $k_0$ -nak  $k$ -val való  $C'$  érintkezési pontját fogjuk meghatározni közös  $t$  érintőjük és a  $CC_0$  egyenes metszéspontjának kitézése útján, ekkor az innen  $k$ -hoz húzott érintő megadja  $C'$ -t, és  $A$ -t  $BC'$  metszi ki  $g$ -ből.

Legyen egy a  $C$ -n és  $C_0$ -on átmenő és  $k$ -t két különböző pontban metsző kör  $k'$ ,  $k$ -val közös pontjai  $D$ ,  $E$ , és a  $CC_0$ ,  $DE$  egyenesek közös pontja  $H$ . Megmutatjuk, hogy  $H$  rajta van  $t$ -n, ez a keresett pont. Legyen  $k$ -nak és  $k_0$ -nak a  $HC'$  egyenessel való további közös pontja  $F$ , ill.  $F_0$ , és alkalmazzuk a kör két szelőjén a metszéspontok között keletkezett szakaszokra ismert tételt a  $H$  pontra és rendre a  $k$ ,  $k'$ ,  $k_0$  körre:

$$(1) \quad HC' \cdot HF = HD \cdot HE = HC \cdot HC_0 = HC' \cdot HF_0.$$

A szélső tagokból  $HF_0 = HF$ , ezért  $F_0$  azonos  $F$ -fel, tehát  $C'$ -vel is, mert ez  $k$  és  $k_0$  egyetlen közös pontja, ennél fogva  $HC'$  azonos a keresett  $t$ -vel,  $C'$  a  $H$ -ból  $k$ -hoz húzott (egyik) érintő érintési pontja.

( $F_0$  és  $F$  azonosságának bizonyításában azt is felhasználtuk, hogy mindkettő a  $H$ -nak ugyanazon oldalán van. Ez abból következik, hogy  $C$ , vele  $k_0$  és vele  $C_0$  is a  $k$ -ban van, hiszen  $BC < e$ , ezért a  $CC_0$  szakasz része a  $CC_0$  egyenes  $k$ -ba eső húrjának, ezért  $D$  és  $E$  a  $CC_0$  egyenes ugyanazon partján vannak, és így  $H$  mindhárom körre nézve külső pont.)

A visszavezetéssel kapott problémát megoldottuk, és ezzel az eredetit is. Csak azt kell még megjegyeznünk, hogy  $k'$  középpontját tetszés szerint választhatjuk, mert az adódó  $DE$  egyenes mindig ugyanabban a pontban metszi  $CC_0$ -t, hiszen ez a metszéspont azonos  $t$  és  $CC_0$ , metszéspontjával,  $H$ -val. – Ezek után  $C'$  kitézése alapszerkesztés.

A szerkesztés helyességének bizonyítására csak azt kell belátnunk, hogy a  $H$ -ból  $C'$  útján a fentiek szerint kapott  $A$  pontra nézve fennáll  $AC = AC'$ . Valóban, az  $A$  körül  $AC$  sugárral írt kört  $HC$  még egyszer  $C_0$ -ban metszi, és  $HC \cdot HC_0 = HC'^2$ , eszerint a kört  $C'$ -ben érinti  $HC'$ , tehát  $AC'$  hossza a sugár.

A szerkesztés végrehajtható, ha  $C_0$  a  $k$  belsejében vagy a kerületén adódik:  $BC_0 \leq e$ , azaz  $a^2 + 4m_a^2 \leq e^2$ , ez magában foglalja az  $a < e$  feltételt is. Egyenlőség esetén  $C_0$  a  $k$ -n van, ide esik  $H$  és  $C'$ , tehát csak egy háromszög adódik; ekkor  $A$  felezi  $BC_0$ -t, az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú:  $BA = AC_0 = AC$ .  $k$  belsejében létrejött  $C_0$  esetén viszont  $H$  külső pont, két érintő húzható belőle, két háromszög adódik; bennük  $AC$  és  $AB$  különbözők, mert  $C'$  egyik helyzete közelebb van  $g$ -hez, mint  $C_0$ , másika távolabb (de mindenesetre  $g$ -nek  $B$ -t nem tartalmazó partján). Másrészt eleve tudjuk, hogy egy megoldásnak  $BC$  felező merőlegesére való tükörképe is megoldás, ezért a kapott két megoldás nem lényegesen különböző.

II. Adott két oldal különbsége: az  $AC - AB = b - c = d$  szakasz. Fenti megoldásunk csekély módosítással ismét használható lesz. Az  $AC'^* = AC$  szakaszt az  $AB$  félegyenesre mérjük fel, így  $BC'^* = d$ , tehát  $C'^*$  a  $B$  körüli,  $d$  sugarú  $k^*$  körön lesz, és lényegében  $C'^*$  megszerkesztését tekintjük feladatunknak. A  $C$ ,  $C_0$  pontokon átmenő, alkalmas  $k'^*$

kör által most a  $k^*$ -ból kimetszett  $D^*$ ,  $E^*$  pontokat összekötő szelő metszi ki  $CC_0$ -ból azt a  $H^*$  pontot, ahol  $k^*$ -nak  $C'^*$ -beli  $t^*$  érintője is átmegy, vagyis amely  $H^*$ -ból húzott érintő érintési pontja adja  $C'^*$ -ot.

A szerkeszthetőség egyetlen feltétele  $d < a$ . Így ugyanis  $C$  a  $k^*$ -ra nézve külső pont, és ez áll a  $CC_0$  egyenes minden pontjára, hiszen éppen  $C$  a  $k^*$ -hoz legközelebbi pontja. Ezért  $H^*$  nem lehet rajta  $k^*$ -on, mindig 2 érintőt, 2 megoldást kapunk, de ezek ismét szimmetrikus párt adnak (a tükörkép-megoldásban  $c - b = d$ ).

Az elemzés, bizonyítás és diszkusszió teljes végrehajtását az olvasóra hagyjuk.

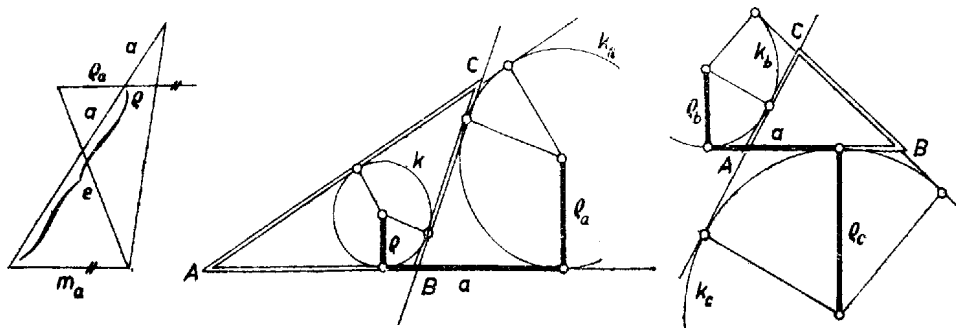
Pintér János (Budapest, I. István g. IV. o. t.)  
Solymosi András (Budapest, Petőfi S. g. IV. o. t.)

*Megjegyzés.* Rövidebben fogalmazhatjuk megoldásainkat a pontnak körre vonatkozó hatványára, két kör közös hatványvonalára, három kör közös hatványpontjára vonatkozó fogalmak és ismeretek fölhasználásával.<sup>1</sup> A keresett  $k_0$  és az adott  $k$  (ill.  $k^*$ ) érintkezési pontjában közös lesz az érintőjük, ez a  $h$  hatványvonaluk.  $C$  és  $C_0$  pontjainkat a  $CC_0$  egyenes útján kapcsolhatjuk össze a hatványvonalal: keressük meg  $h$ -nak ezen levő pontját.  $CC_0$  is hatványvonalra lesz, ha vesszük a fenti  $k'$ -t (ill.  $k'^*$ -ot), és ekkor  $k$  és  $k'$  hatványvonala megszerkeszthető,  $CC_0$ -ból kimetszi a  $k$ ,  $k_0$ ,  $k'$  körhármast  $H$  hatványpontját, itt megy át  $h$ , és érinti  $k$ -t.

**II. megoldás** (vázlat). Az  $a$  és  $m_a$  szakaszokból ismert a háromszög  $t$  területe, az  $e + a$  összeg pedig a  $2s$  kerület, így könnyen megszerkeszthető az  $ABC$  háromszögbe beírható  $k$  kör sugarának  $\varrho$ , valamint az  $a$  oldalhoz hozzáírt  $k_a$  külső érintő kör sugarának  $\varrho_a$  hossza, a

$$\varrho = \frac{t}{s} = \frac{2t}{2s} = \frac{am_a}{e+a}, \quad \varrho_a = \frac{t}{s-a} = \frac{2t}{2s-2a} = \frac{am_a}{e-a}$$

ismert összefüggések alapján (2. ábra bal fele). Ismeretes továbbá, hogy  $\varrho$  és  $\varrho_a$  első kifejezésének  $s$ , ill.  $s - a$  nevezője éppen az  $A$  csúcs távolsága  $k_a$ -nak, ill.  $k$ -nak az  $AB$  egyenesen levő érintési pontjaitól, és e két pont  $A$ -nak ugyanazon oldalán van; így az ugyanazon oldalegyenesen levő érintési pontok távolsága  $s - (s - a) = a$ .



2. ábra

Ezek alapján egy  $a^*$  egyenes  $a$  hosszúságú szakaszának végpontjaiban emelt merőlegesekre (az egyenes ugyanazon partján)  $\varrho$ -t, ill.  $\varrho_a$ -t felmérve megrajzolhatjuk  $k$ -t és  $k_a$ -t, ezek másik közös külső érintője és bármelyik belső közös érintője  $a^*$ -gal együtt adja a keresett háromszög oldalegyeneseit (az ábra közepe).

A  $b - c = d$  különbség alapján a  $b$  és  $c$  oldalhoz hozzáírt  $k_b$ , ill.  $k_c$ , külső érintő kör  $\varrho_b$ ,  $\varrho_c$  sugarát szerkeszthetjük meg:

$$\varrho_b = \frac{t}{s-b} = \frac{2t}{a-b+c} = \frac{am_a}{a-d}, \quad \varrho_c = \frac{t}{s-c} = \frac{am_a}{a+b},$$

$s - b$  és  $s - c$  e körök  $AB$ -n levő érintési pontjának távolsága  $A$ -tól,  $A$  e két pont között van, így távolságuk  $(s - b)(s - c) = a$ . A szerkesztés csak annyiban tér el az előzőtől, hogy a két kört  $a^*$  két partján kell rajzolnunk, a háromszög oldalegyenesei  $a^*$ , a körök másik belső közös érintője (ami itt biztosan létezik), és bármelyik a közös külső érintőik közül.

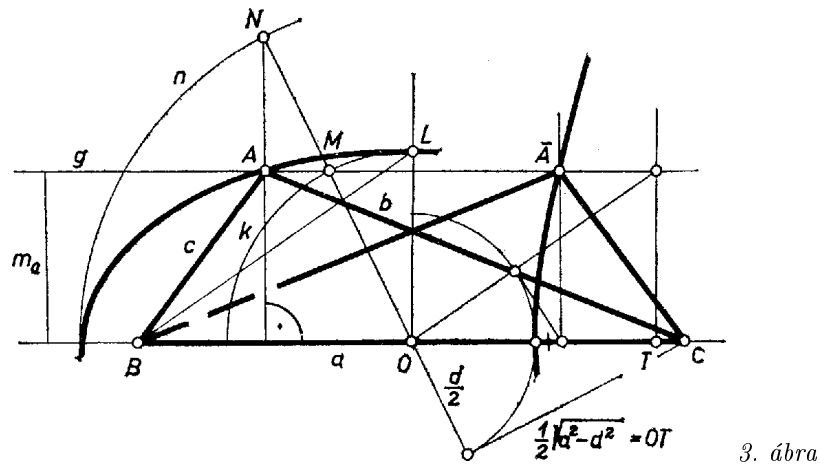
A bizonyítás és a diszkusszió végrehajtásával az olvasó könnyen teljes megoldássá egészítheti ki vázlatainkat.

Korchmáros Gábor (Budapest, Rákóczi F. g. IV. o. t.) dolgozata alapján  
kiegészítésekkel

*Megjegyzések.* 1. A  $BC$  oldalt rögzítve az  $A$  csúcs egyrészt a  $BC$ -val párhuzamos, tőle  $m_a$  távolságban haladó  $g$  egyenesen van rajta, másrészt azon az ellipszisen, ill. hiperbolán, melynek fókuszai  $B$  és  $C$ , és nagy tengelye  $e = b + c$ , ill. valós tengelye  $d = |b - c|$ . E két mértani hely közös pontjainak megszerkesztését könnyíti, hogy  $g$  párhuzamos a görbe egyik tengelyével. A szerkesztést az 1325. feladat<sup>2</sup> ellipszis esetére vázolta, hiperbola esetére végrehajtotta. Mindkét görbe  $O$  középpontja  $BC$  felezőpontja, az ellipszis kis tengelyének  $L$  végpontjára  $BL = CL = e/2$ . Mese  $g$  az  $O$  körüli  $OL$  sugarú  $k$  (kis-) kört  $M$ -ben, az  $OM$  félegyenes az  $O$  körüli,  $e/2$  sugarú  $n$  (nagy-) kört  $N$ -ben, ekkor az  $A$  csúcsot az  $N$ -ből  $BC$ -re bocsátott merőleges metszi ki  $g$ -ból (3. ábra).

<sup>1</sup>Lásd pl. Gallai T.–Hódi E.–Péter R.–Szabó P.–Tolnai J.: Matematika a gimn. III. o. számára, 12. kiadás, Tankönyvkiadó, Bp. 1962, 197–200. o.

<sup>2</sup>K. M. L. 30 (1965) 207. o.



3. ábra

*Eff Lajos* (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

2. A szerkesztést számítással többféleképpen is előkészíthetjük. Pl. a Heron-képlet alapján:

$$16t^2 = 4a^2m_a^2 = (e + a)(e - a)(a + d)(a - d),$$

$e$  és  $d$  mindegyikéhez megszerkeszthetjük a másikat.

*Kalmár István* (Debrecen, Fazekas M. g. IV. o. t.)