I. megoldás. Az $n = 1$ esetre az állítás szerint 1 összeg–felbontás létezik. Viszont 1-et nem lehet felbontani természetes számokra. Ez azt mutatja, hogy az egytagú összeget, magát az n számot is előállításnak kell tekintenünk, pl. $n = 2$ összes előállításainak a száma úgy lesz $2^{2-1} = 2$, ha ezeket vesszük: $1 + 1$ és 2.

Tüntessük fel a számegyenesen a 0-t és az első n természetes számot. Az n szám minden szóban forgó előállításának megfelel a kijelölt pontok közül egy olyan kiválasztás, amely tartalmazza a 0-t, az n-t és a többi $n-1$ pont közül tetszés szerintieket (akár mindet, akár esetleg egyet sem). Megfordítva, minden ilyen kiválasztásból leolvasható n-nek egy a követelményt kielégítő előállítása. Pl. az 1-es és az $n-1$-es osztáspont kiválasztása (a 0-n és n-en kívül) különbözőnek számít, mihelyt $n > 2$, mert az $1 + (n-1)$ és az $(n-1) + 1$ felbontásokat különbözőknek tekintjük.

Így azt kell meghatároznunk, hányféleképpen lehet az 1, 2, …, $n-1$ pontból tetszés szerinti számút osztópontnak venni. Egy–egy kiválasztást úgy adhatunk meg, hogy az 1-es, 2-es, …, $n-1$-es ponthoz rendre csillagot, ill. mínusz jelet írunk, aszerint, hogy kiválasztottuk-e osztópontnak vagy nem. Így minden pontban 2 lehetőségünk van, összesen tehát 2^{n-1}, mert a megjelölések egymástól függetlenek, a lehetőségek száma lépésről lépésre megkétszereződik. Eszerint a szóban forgó előállítások száma valóban 2^{n-1}.

Pl. $n = 3$ és 4 esetén a 2, ill. 3 belső pont megjelölésének lehetőségei:

$$\begin{array}{cccc} {}^*,{}^*; & {}^*,-; & -,{}^*; & -,-; \\ {}^*,{}^*,{}^*;\ {}^*,{}^*,-; & {}^*,-,{}^*;\ {}^*,-,-; & -,{}^*,{}^*;\ -,{}^*,-; & -,-,{}^*;\ -,-,-, \end{array}$$

és az utóbbi esetben a megfelelő előállítások tagjai:

$$1,1,1,1;\quad 1,1,2;\quad 1,2,1;\quad 1,3;\quad 2,1,1;\quad 2,2;\quad 3,1;\quad 4.$$

Belső Béla (Győr, Benedek–rendi Czuczor Gergely g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A meggondolást továbbfejlesztve külön–külön megszámlálhatjuk, hány felbontás 1-tagú, hány 2-tagú, …, hány n-tagú. n tagú az, amelyben minden belső pont * jelet kapott, 1 tagú a csupa mínusz–jeles, ilyen felbontás tehát 1–1 van. 2-tagúak azok, amelyekben egyetlen helyen áll *, számuk nyilvánvalóan $n-1$, ugyanennyi az $n-1$ tagúaké is, amelyekben egyetlen helyen áll mínuszjel. A k tagúak száma (ahol $1 \leq k \leq n$) az 1362. feladatban[1] alkalmazott meggondoláshoz hasonlóan

$$\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}. \tag{1}$$

II. megoldás. Jelöljük az n szám szóba jövő előállításainak számát $f(n)$-nel. Az I. megoldásban láttuk, hogy $f(1) = 1 = 2^0$, és $f(2) = 2 = 2^1$. Elég még megmutatnunk, hogy a számot eggyel növelve a felbontások száma megkétszereződik: $f(n+1) = 2\cdot f(n)$. Ebből $f(n) = 2^{n-1}$, a feladat állítása nyilvánvalóan következik.

Gondoljuk magunk elé az n szám összes szóban forgó előállításait. Ezek mindegyikéből két módon képezünk egy–egy előállítást az $n+1$ számra:

α mód: az utolsó tagot 1-gyel növeljük,

β mód: az előállítás végére egy +1-es új tagot csatolunk.

Megmutatjuk, hogy az n szám két különböző előállításából, E_1-ből és E_2-ből az $n+1$ számra képezett $E_1\alpha$, $E_1\beta$, $E_2\alpha$, $E_2\beta$ előállítások mind különbözők, így $n+1$ előállításainak száma legalább 2-szer akkora, mint n előállításaié, vagyis $f(n+1)$ nem kisebb $2\cdot f(n)$-nél.

$E_1\alpha$ és $E_2\alpha$ különbözők, mert ha azonosak volnának, akkor az utolsó tagjuknak 1-gyel – 1-gyel való csökkentésével az n számra kapnánk két azonos előállítást. Ugyanígy $E_1\beta$ és $E_2\beta$ is különbözők. Végül nem lehet azonos $E_i\alpha$ és $E_j\beta$ sem – ahol i is, j is az 1 és 2 indexek bármelyike –, mert az utóbbinak utolsó tagja 1, az előbbié pedig legalább 2.

Másrészt nincs $n+1$-nek olyan előállítása, amelyet a fenti módon ne kaptunk volna meg. Mert ha $n+1$ egy megfelelő előállításának, F-nek, utolsó tagja nagyobb 1-nél, akkor abból 1-et levonva, ha pedig az utolsó tag 1, akkor azt elhagyva n-re kapunk egy összeg–előállítást, ezt a feltevés szerint fent felhasználtuk, és így belőle az α, ill. β módon eljutottunk F-hez. Így $f(n+1)$ nem is nagyobb $2\cdot f(n)$-nél, tehát egyenlő vele. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Bárány Imre (Budapest–Mátyásföld, Corvin M. g. IV. o. t.)

III. megoldás. Ismét az $f(n+1) = 2\cdot f(n)$ egyenlőséget bizonyítjuk be. Csoportosítsuk az $n+1$ szám felbontásait első tagjuk értéke szerint. Az n taggal kezdődő felbontások száma $f(n+1-a)$, ahányféleképpen az a-t $n+1$-re kiegészítő $n+1-a$ számot előállíthatjuk. Végigmenve a szóba jövő $a = 1, 2, \ldots, n, n+1$ értékeken, minden felbontást egyszer és csak egyszer veszünk számba, ezért

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1) + \ldots + f(1) + 1,$$

az utolsó tag azt fejezi ki, hogy $n+1$-nek 1 egytagú felbontása is van.

Ugyanígy adódik n helyén $n-1$-et véve az

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) + \ldots + f(1) + 1$$

[1]Lásd K. M. L. 31 (1965) 73. o. – Az ilyen alakú kifejezésekről bővebbet olvashat az érdeklődő pl. a következő helyen: *Kürschák J.–Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.:* Matematikai Versenytételek I. rész 3. kiadás, Tankönyvkiadó, Bp., 1964. 26–28. o.

egyenlőség. Ezt az előbbiből kivonva

$$f(n+1)-f(n)=f(n), \quad \text{vagyis} \quad f(n+1)=2\cdot f(n).$$

Csirmaz László (Budapest, I. István g. I. o. t.)