$\alpha$) Az I. és II. keverék meglevő mennyisége összekeverésük előtt

$$(1)\qquad a+b-f-j=A, \qquad \text{ill.} \qquad c+d-f=C,$$

sűrűségük pedig a laboratórium megállapítása szerint, a megengedett legnagyobb eltérés ezrelékben megadott arányszámát $y$-nal jelölve

$$(2)\qquad \text{az I.-é: } g\left(1-\frac{h}{1000}\right)=\frac{g}{1000}(1000-h)=\frac{gH}{1000}=G_{\mathrm{I}},$$

$$(3)\qquad \text{a II.-é: } g\left(1+\frac{y+i}{1000}\right)=\frac{g}{1000}(1000+y+i)=\frac{g}{1000}(Y+i)=G_{\mathrm{II}}.$$

(Az $A$, $B$, $1000-h=H$, $1000+y=Y$, $G_{\mathrm{I}}$ és $G_{\mathrm{II}}$ jelöléseket számításunk egyszerűsítése végett vezettük be.) Ezekből a maradékok térfogata $A/G_{\mathrm{I}}$, ill. $C/G_{\mathrm{II}}$, és a végleges keverék sűrűsége:

$$(4)\qquad \frac{A+C}{\dfrac{A}{G_{\mathrm{I}}}+\dfrac{C}{G_{\mathrm{II}}}}=\frac{g}{1000}\cdot\frac{A+C}{\dfrac{A}{H}+\dfrac{C}{Y+i}}.$$

Ugyanez a sűrűség a feladat utolsó közlése szerint

$$(5)\qquad g\left(1+\frac{y}{1000}\right)=\frac{gY}{1000},$$

ugyanis csak fölfelé való eltérésről lehet szó, mert a keverék sűrűsége mindig az alkotórészek sűrűsége közé esik.

(4) és (5) egyenlőségéből $Y$-ra másodfokú egyenletet kapunk:

$$\frac{A+C}{\dfrac{A}{H}+\dfrac{C}{Y+i}}=Y, \quad AY^2-A(H-i)Y-(A+C)Hi=0.$$

Az $Y$-t nem tartalmazó tag, a két gyök szorzatának $A$-szorosa, negatív, így a gyökök valósak és ellentett előjelűek. Csak a pozitív gyököt használhatjuk, ebből a legnagyobb megengedett eltérés, az (1)-et is figyelembe véve

$$\begin{aligned}
y&=\frac{1}{2A}\left[A(H-i)+\sqrt{A^2(H+i)^2+4ACHi}\right]-1000=\\
&=\sqrt{\left(\frac{H+i}{2}\right)^2+\frac{CHi}{A}}-\left(500+\frac{i+h}{2}\right)=\\
&=\sqrt{\left(500+\frac{i-h}{2}\right)^2+\frac{c+d-f}{a+b-f-j}\cdot(1000-h)i}-\left(500+\frac{i+h}{2}\right).
\end{aligned}$$

$\beta$) Legyen az eredeti folyadékok sűrűsége $x_1$, $x_2$. (4)-hez hasonlóan

$$\frac{a+b}{\dfrac{a}{x_1}+\dfrac{b}{x_2}}=G_{\mathrm{I}}, \qquad \frac{c+d}{\dfrac{c}{x_1}+\dfrac{d}{x_2}}=G_{\mathrm{II}}.$$

Innen a sűrűségük reciprokára kapunk elsőfokú egyenletrendszert:

$$\frac{a}{x_1}+\frac{b}{x_2}=\frac{a+b}{G_{\mathrm{I}}}, \qquad \frac{c}{x_1}+\frac{d}{x_2}=\frac{c+d}{G_{\mathrm{II}}};$$

$$(6)\qquad \begin{cases}\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{ad-bc}\left(\dfrac{d(a+b)}{G_{\mathrm{I}}}-\dfrac{b(c+d)}{G_{\mathrm{II}}}\right),\\[2ex] \dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{ad-bc}\left(\dfrac{a(c+d)}{G_{\mathrm{II}}}-\dfrac{c(a+b)}{G_{\mathrm{I}}}\right).\end{cases}$$

Végül (2) és (3) alapján

$$(7)\qquad \begin{cases}x_1=\dfrac{g}{10^3}\cdot\dfrac{(ad-bc)\left[10^6+10^3(y+i-h)-h(y+i)\right]}{10^3(ad-bc)+(y+i)(a+b)d+hb(c+d)},\\[2ex] x_2=\dfrac{g}{10^3}\cdot\dfrac{(ad-bc)\left[10^6+10^3(y+i-h)-h(y+i)\right]}{10^3(ad-bc)+(y+i)(c+d)a+hc(a+b)},\end{cases}$$

ahol $y+i$ helyére a következő kifejezés írandó:

$$\sqrt{\left(500+\frac{i-h}{2}\right)^2+\frac{c+d-f}{a+b-f-j}(1000-h)i}-\left(500-\frac{i-h}{2}\right).$$

A feladat gyakorlati jelentését figyelembe véve (6)-ban sem $ad-bc$, sem a nagy zárójelekben álló különbségek értéke nem lehet 0. (Lényegében az utóbbiak adják a (7)-beli nevezőket.) Ha ugyanis

$$ad-bc=0, \qquad \text{akkor} \qquad c:a=d:b,$$

vagyis a II. keverék céljára a két eredeti folyadékból felhasznált tömegek arányosak az I. keverékhez felhasználtakkal. Így pedig I. és II. nem lehet különböző sűrűségű. – A nagy zárójelbeli különbségek eltűnéséből viszont $1/x_1=0$, ill. $1/x_2=0$ adódnék, holott helyesen mért adatok nem vezethetnek egyik ilyen eredményre sem.

Az $e$ adatot nem használtuk fel. Közte és a többi adat között az $a+b=e(c+d)$ összefüggésnek kell fennállnia. Ez az adat tehát vagy felesleges, vagy ha az összefüggés nem teljesül, ellentmondók az adatok.

*Kafka Péter* (Pannonhalma, Bencés g. III. o. t.)
*Babai László* (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)