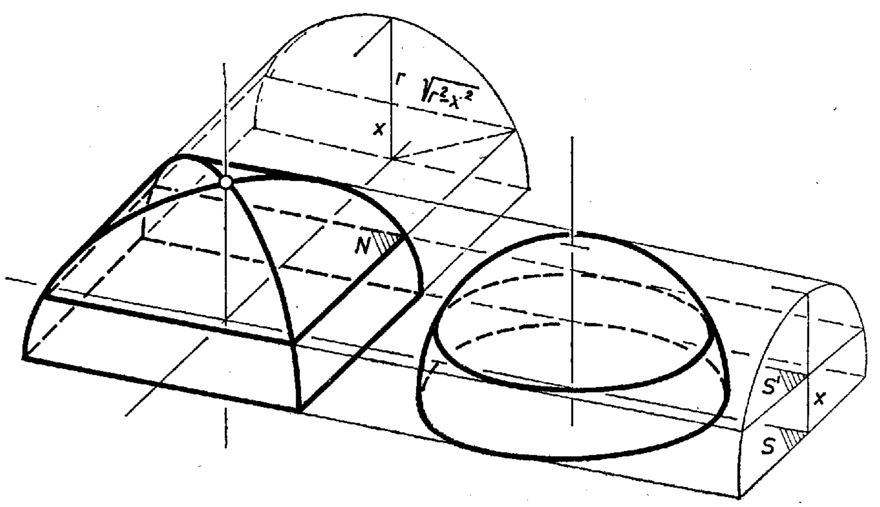
I. megoldás. A két tengely által meghatározott S sík mindkét hengernek szimmetriasíkja, így közös részüknek is. Ezért – S-et vízszintesen tartva – elég meghatározni a K közös rész S fölé eső felének térfogatát.



Egy az S-sel párhuzamos, fölötte $x(<r)$ magasságban haladó S' sík mindkét hengert két alkotóban metszi, távolságuk $2\sqrt{r^2-x^2}$, ezért a K-ból kimetszett idom egy ugyanekkora oldalú N négyzet, és területe $4(r^2-x^2)$. Az $x=r$ magasságban haladó sík pedig egy–egy alkotóban érinti a hengereket. Legyen x értéke egymás után

$$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n}\ \ldots,\ \frac{(n-1)r}{n},$$

ez az $n-1$ sík K fölső felét n rétegre osztja, mindegyik réteg magassága r/n. Az alsó réteg alapidoma a fentihez hasonló meggondolás szerint $2r$ oldalú négyzet, a fölső rétegnek csak egyetlen pontja van az alaplapjától r/n távolságban, a mondott érintési alkotók metszéspontja.

Írjunk mindegyik rétegbe is és köréje is hasábot, melynek alapidoma a réteg fölső, ill. alsó határlapja; a fölső rétegbe nem lehet ilyen hasábot beírni. Minden egyes réteg benne van a köréje írt hasábban, másrészt magában foglalja a beírt hasábot, ezért térfogata e két hasáb térfogata közé esik. Így K fölső felének $V/2$ térfogata középe esik a körülírt, ill. a beírt hasábok térfogatából képezett S_n, ill. s_n összegnek:

$$s_n<V/2<S_n.$$

(s_n csak $n-1$ tagból áll.) Ezekből az összegekből a közös $r/4$ magasságot kiemelve a zárójelben a fölső, ill. alsó határlapok területének összege áll, ezért a négyzetszámok összegére ismert

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

képlet fölhasználásával így alakíthatók:

$$s_n=\frac{r}{n}\left[4\left(r^2-\frac{r^2}{n^2}\right)+4\left(r^2-\frac{4r^2}{n^2}\right)+\ldots+4\left(r^2-\frac{(n-1)^2r^2}{n^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{r}{n}\left[4(n-1)r^2-\frac{4r^2}{n^2}(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)\right]=$$

$$=\frac{4r^3}{n}\left[(n-1)-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}\right]=4r^3\cdot\frac{(n-1)(4n+1)}{6n^2}=4r^3\cdot\frac{4n^2-3n-1}{6n^2},$$

$$S_n=S_n+\frac{r}{n}\cdot 4r^2=4r^3\left[\frac{1}{n}+\frac{(n-1)(4n+1)}{6n^2}\right]=4r^3\cdot\frac{4n^2+3n-1}{6n^2},$$

hiszen az alsó határlapok területének összegében ugyanúgy benne van a közbülső metszetek területének összege, mint s_n-ben, de többletként szerepel az alsó réteg alsó határlapjának $4r^2$ területe. Ezeket (1)-be beírva, majd $8r^3$-nel osztva

$$\frac{4n^2-3n-1}{12n^2}<\frac{V}{16r^3}<\frac{4n^2+3n-1}{12n^2},\ \text{azaz}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{3n+1}{12n^2}<\frac{V}{16r^3}<\frac{1}{3}+\frac{3n-1}{12n^2}.$$

Eszerint a $V/16r^3$ hányados minden pozitív egész n esetén a bal és jobb oldali korlát közé esik. Ámde közéjük esik az $1/3$ szám is. Végül csak egy szám van, amelyik minden pozitív egész n esetén a két korlát közé esik, mert különbségük, $6n/12n^2 = 1/2n$, bármilyen kicsi pozitív számnál kisebb, amint n elég nagy. Ezért

$$\frac{V}{16r^3} = \frac{1}{3}, \quad V = \frac{16r^3}{3} = \frac{2}{3}(2r)^3.$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

Márki László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

II. megoldás. A Cavalieri–elv szerint két test térfogata egyenlő, ha bármely, egy adott síkkal párhuzamos sík a két testből egyenlő területű idomokat metsz ki. Ezt a következő kis módosítással fogjuk felhasználni: ha két testet bármely, egy adott síkkal párhuzamos síkkal metszve a kimetszett idomok területének aránya egy k szám, akkor a két test térfogatának aránya k.

Toljunk (írjunk) bele hengereink egyikébe egy r sugarú G gömböt; ez a hengert érinti, középpontja a henger tengelyén van. Az I. megoldásban használt S' sík G-ből $\sqrt{r^2-x^2}$ sugarú k kört metsz ki, ennek területe $\pi(r^2-x^2)$, ennélfogva N és k területének aránya $4/\pi$, állandó. Így fenti elvünk szerint K és G térfogatainak aránya ugyancsak $4/\pi$, tehát

$$V = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{2}{3}(2r)^3.$$

Elekes György (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)