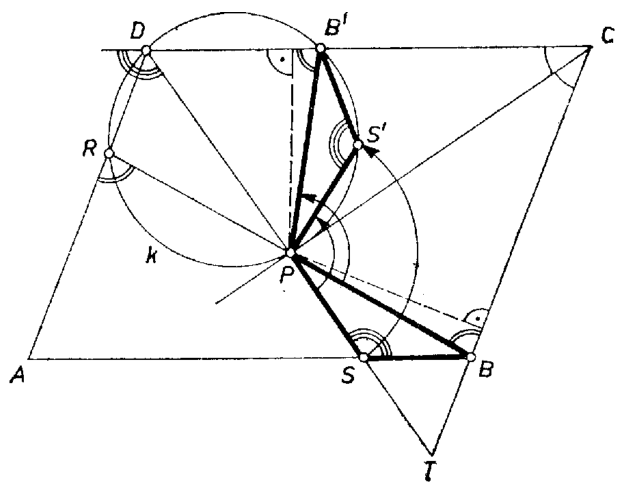
I. megoldás. A DP és BC egyenesek közös pontját T-vel jelölve PDR és PTB, valamint SBT és DCT hasonló helyzetű háromszögek a P, ill. T középpontra nézve, továbbá CP a CDT háromszög szögfelezőszakasza, ezért

$$\frac{DR}{TB}=\frac{DP}{TP},\quad \frac{SB}{TB}=\frac{DC}{TC},\quad \frac{DC}{TC}=\frac{DP}{TP}.$$

A harmadik egyenlőség szerint az első két egyenlőség jobb oldalán álló arányok egyenlők, ezért a bal odalukon álló arányok is egyenlők. Az utóbbiak nevezője azonos, ezért számlálóik egyenlők, $DR=SB$. Ezt kellett bizonyítanunk.



Nem jönnek létre valódi háromszögek, ha T a B-ben adódik, továbbá ha P-t C-ben választjuk (ekkor T is C-ben adódik). Az első esetben P a szögfelezőnek a BD átlón levő pontja, ekkor R a D-be, S a B-be esik, a kérdéses szakaszok mindegyike 0, az állítás igaz, de semmitmondó. A második esetben sem R, sem S nem jön létre, az állítás tárgytalanná válik.

Amennyiben $ABCD$ rombusz, B és D tükrös pontpár, AB és AD tükrös egyenespár CP-re mint tengelyre nézve, így DR és BS egymás tükörképei.

Darvas György (Budapest, Radnóti M. Gyak. Gimn.)

Megjegyzés. Bizonyításunk a paralelogramma C-beli külső szögének felezőpontján felvett (C-től különböző) pontra is érvényes, mert az osztásarányra vonatkozó tétel a külső szögfelezőre is érvényes.

II. megoldás. Fordítsuk el a $BCPS$ négyszöget P körül addig, míg C ismét a DC egyenesre jut, és legyen ekkor BS új helyzete $B'S'$. B' a DC egyenesen adódik, hiszen a BC és DC egyenesek egyenlő távolságra vannak P-től. Másrészt B' a PDR háromszög köré írt k kör pontja, mert

$$PB'D\sphericalangle=PBC\sphericalangle=180^\circ-PRD\sphericalangle,$$

hiszen P rajta van a $BCDR$ trapéz BR szárán. Így pedig S' is rajta van k-n, mint a $PDRB'$ húrnégyszög körülírt körén, ugyanis

$$PS'B'\sphericalangle=PSB\sphericalangle=180^\circ-PDB'\sphericalangle.$$

Az állítás most már abból adódik, hogy az elfordítás miatt $SB=S'B'$, másrészt $DR=S'B'$, mert ezek k húrjai, és hozzájuk k-ban egyenlő kerületi szögek, és így egyenlő ívek tartoznak:

$$DPR\sphericalangle=SPB\sphericalangle=S'PB'\sphericalangle.$$

Az ábrán bemutatott helyzeten P a C-ből induló belső szögfelezőnek az ABD háromszögbe eső szakaszán van, így R és S e háromszög kerületének pontjai. Az olvasó hasonlóan beláthatja, hogy az állítás a mondott, valamint a külső szögfelező bármely, a C-től különböző pontjára érvényes.