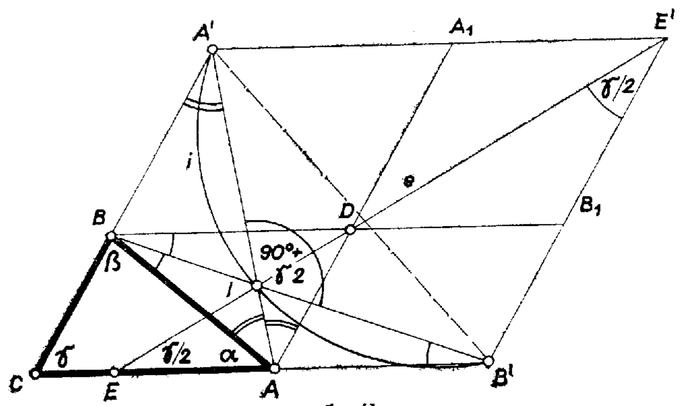
I. megoldás. Csak azt kell bizonyítanunk, hogy az $A'BAB'$ törött vonal 3 egyenlő szakaszból áll.



1. ábra

Egészítsük ki az $A'CB'$ háromszöget $A'CB'E'$ paralelogrammává (1. ábra). Az e egyenes átmegy E'-n és felezi az $A'E'B' = \gamma$ szöget, mert $B'E' = CA' = p = q - (q-p) = CB' - CE = B'E$, az $EB'E'$ háromszög egyenlő szárú, $B'EE'$ szöge egyenlő a B'-nél levő γ külső szög felével, tehát EE' azonos e-vel. Így az 1399. feladatban bebizonyított tételt a $CB'E'A'$ paralelogrammára, E'-ból induló e szögfelezőjének I pontjára és a $B'I$, $A'I$ egyenessel kimetszett A, B pontra alkalmazva $B'A = A'B$.

Ha $AB < A'B = AB'$ volna, akkor az $AA'B$ és $AB'B$ háromszögben

$$AA'B\sphericalangle < A'AB\sphericalangle \quad \text{és} \quad AB'B\sphericalangle < ABB'\sphericalangle.$$

A háromszögek A-nál, ill. B-nél levő külső szögére

$$BAC\sphericalangle = AB'B\sphericalangle + ABB'\sphericalangle < 2\cdot ABB'\sphericalangle \quad \text{és}$$
$$ABC\sphericalangle = AA'B\sphericalangle + A'AB\sphericalangle < 2\cdot A'AB\sphericalangle.$$

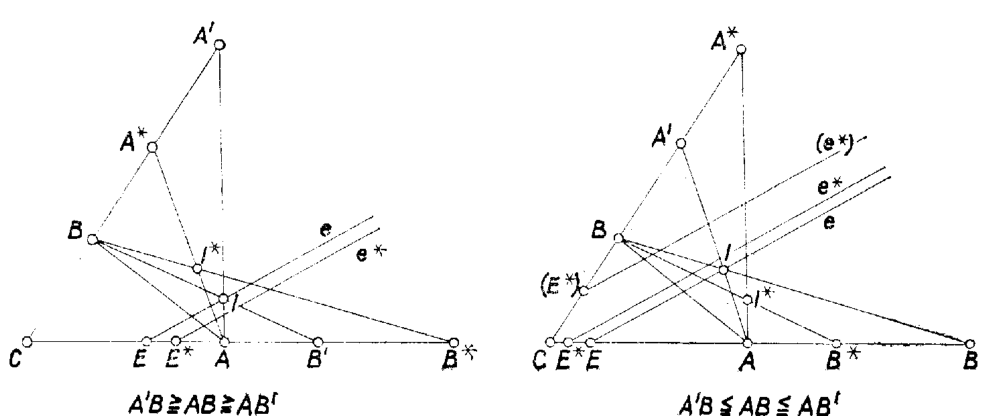
Így egyrészt az ABI háromszögből, mivel $AIB\sphericalangle = A'IB'\sphericalangle = 90^\circ + \gamma/2$,

$$ABB'\sphericalangle + A'AB\sphericalangle = 180^\circ - AIB\sphericalangle = 90^\circ - \gamma/2,$$

másrészt az ABC háromszöget véve figyelembe

$$ABB'\sphericalangle + A'AB\sphericalangle > \frac{1}{2}(BAC\sphericalangle + ABC\sphericalangle) = \frac{1}{2}(180^\circ - ACB\sphericalangle) = \\ = 90^\circ - \gamma/2.$$

A két összefüggés egymásnak ellentmond. – Hasonlóan lehetetlenség következik az $AB > A'B$ feltételből is, csak a „$<$” és „$>$” jel mindenütt felcserélődik. Így kell, hogy $AB = A'B = AB'$ legyen, és ezt akartuk bizonyítani.



2. ábra

II. megoldás (az 1399. feladat felhasználása nélkül). Az előző megoldás záró meggondolásának eredményét így fogalmazhatjuk: ha $AB \le A'B$ és $AB \le AB'$, akkor itt csak az egyenlőség jele állhat mindkét helyen, hasonlóan akkor is, ha mindkét helyen a „$\ge$” jel áll. Meg kell még vizsgálnunk, nem állhat-e fenn $A'B \ge AB \ge AB'$ vagy $A'B \le AB \le AB'$ úgy, hogy ne mind a két helyen az egyenlőség jele legyen érvényes. Mérjük rá BA'-re a $BA^* = BA$ és AB'-re az $AB^* = AB$ távolságot (2. ábra). Első esetben AA^* a BAA' szögtartományban, BB^* az $A'BB'$ szögtartományban van, tehát I^* metszéspontjuk az $A'BI$ háromszögben van. Másrészt, ha nem áll mindkét helyen egyenlőség, akkor $CB^* - CA^* > CB' - CA' = CE$, tehát ezt mérve a CB' egyenesre egy E-n túli E^* pontba jutunk. Ebből húzva párhuzamost az $EI = e$ egyenessel, azt e elválasztja az $A'BI$ háromszögtől. Ez azonban nem lehet, mert a cikk elemzése szerint I^* az e^*-on van.

Hasonlóan a második esetben AA^* az $A'AB'$ szögtartományban van, BB^* az ABB' tartományban, tehát I^* az AIB' háromszögben van, ha viszont nem áll mind a két helyen egyenlőség, akkor $CB^* - CA^* < CB' - CA' = CE$, s így E^* a CE szakaszra vagy a CA' szárra esik, s így e ismét elválasztja e^*-ot és I^*-ot, ami nem lehetséges. Kell tehát, hogy $A'B = BA = AB'$ álljon.

Surányi László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)