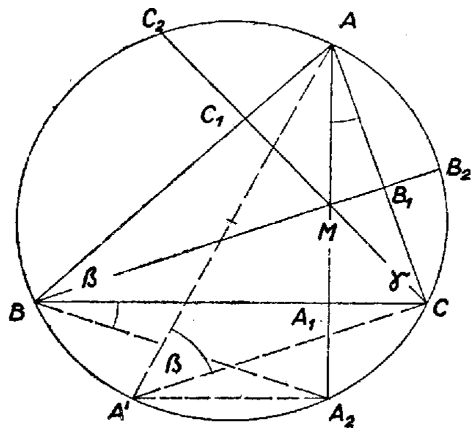
I. Ismeretes[1], hogy minden háromszög M magasságpontjának bármelyik oldalra való tükörképe a háromszög köré írt körön van. M-et pl. a BC oldalra való tükörképével összekötő egyenes merőleges az oldalra, ezért azonos az AM magasság egyenesével, tehát a tükörkép a feladat előírása szerinti A_2 pont, és A_1A_2 és MA_1 egyenlők és egyirányúak.

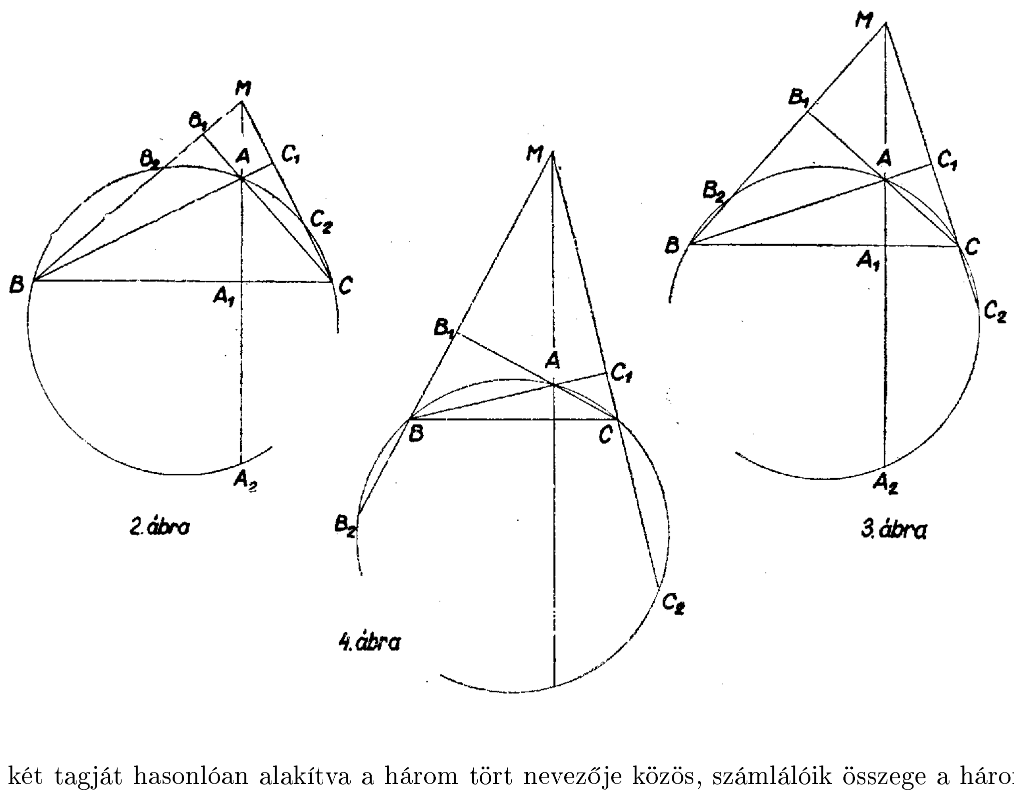


1. ábra

Hegyesszögű háromszög magasságpontja a háromszög belsejében van, így a pontok sorrendje a mondott magasságvonalon A, M, A_1, A_2 (1. ábra), ezért (1) bal oldalának első tagja az alábbiak szerint alakítható:

$$\frac{AA_2}{AA_1}=\frac{AA_1+A_1A_2}{AA_1}=1+\frac{MA_1}{AA_1}=1+\frac{BC\cdot MA_1}{BC\cdot AA_1}=1+\frac{BCM}{BCA}, \tag{2}$$

az utolsó törtben a BCM és BCA háromszög területeinek aránya áll, a területeket ugyanúgy jelöltük, mint magukat a háromszögeket.



2. ábra 4. ábra 3. ábra

(1) további két tagját hasonlóan alakítva a három tört nevezője közös, számlálóik összege a háromszög területe, így valóban

$$\frac{AA_2}{AA_1}+\frac{BB_2}{BB_1}+\frac{CC_2}{CC_1}=3+\frac{BCM+CAM+ABM}{ABC}=3+1=4.$$

II. Ha az A csúcsnál derékszög van, akkor ide esik a B_1, C_1 magasságtalppont, egyszersmind B_2 és C_2 is, így (1) második és harmadik tagja 1; másrészt a BC oldal – mint átfogó – a körülírt körnek átmérője, tehát A_2 az A csúcs tükörképe, $AA_2=2AA_1$, tehát (1) első tagja 2. Eszerint (1) változatlanul érvényes.

[1]Lásd pl. az 1272. feladat II. megoldásában, K.M.L. 29 (1964) 26. o.

III. Ha A-nál tompaszög van (2–4. ábrák), akkor (1) első tagja tetszés szerinti nagy értéket felvehet, ezért az állítás nem lehet igaz változatlanul. Megmutatjuk, hogy az állítás úgy marad helyes, ha alakján nem változtatunk, de a szakaszokat iránnyal együtt értjük, azaz – mint a hegyesszögű háromszög esetében – a hányadosokat akkor vesszük pozitívnak, ha a számlálóbeli szakasz egyirányú a nevezőbelivel; ha pedig azzal ellentétes irányú, akkor a hányados negatív. Ha viszont irányítást nem veszünk figyelembe, akkor tompaszögű háromszög esetében (1) bal oldaláról semmi határozottat nem állíthatunk.

Feltevésünk szerint az A_1 magasságtalppont a BC oldalszakaszon van, vagyis a körülírt kör belsejében, a B_1 és C_1 talppontok viszont a CA, ill. BA oldal A-n túli meghosszabbításán, a körön kívül. M is a körön kívül van, AA_1-nek a csúcson túli, BB_1-nek és CC_1-nek pedig a talpponton túli meghosszabbításán. Így a számláló az (1)-beli első hányadosban mindig egyirányú a nevezővel, a (2) átalakítás most is érvényes. A 2. és 3. hányadosban viszont az irányok lehetnek egyezők is, ellentétesek is, és lehet a számláló 0 is.

Ha BB_2 egyező irányú BB_1-gyel, akkor a pontok sorrendje: B, B_2 (a körön), B_1 (a körön kívül), M (2. és 3. ábra); így

$$BB_2 = BB_1 - B_2B_1 = BB_1 - B_1M.$$

Ellentétes irányítás esetén pedig B_2, B, B_1, M a sorrend (4. ábra), és

$$BB_2 = -B_2B = -(B_2B_1 - BB_1) = BB_1 - B_2B_1 = BB_1 - B_1M,$$

vagyis a két kifejezés alakra nézve ugyanaz. Hasonlóan adódik mindegyik lehetőség esetére $CC_2 = CC_1 - C_1M$. Ezek szerint

$$\frac{BB_2}{BB_1} = 1 - \frac{B_1M}{BB_1} = 1 - \frac{AC \cdot B_1M}{AC \cdot BB_1} = 1 - \frac{ACM}{ACB}, \qquad \frac{CC_2}{CC_1} = 1 - \frac{ABM}{ABC},$$

és (1) bal oldala így alakul

$$3 + \frac{BCM - ACM - ABM}{ABC}.$$

Az A csúcs a BCM háromszög belsejében van, ezért a számláló egyenlő az ABC háromszög területével, és így a hányados 1, a kifejezés értéke 4. Ezt akartuk bizonyítani.

Domokos Zsuzsanna (Makó, József A. G. III. o. t.)

Megjegyzés. Az irányok (előjelek) figyelembevételének szükségességére más oldalról jövünk rá, ha az állítást trigonometriai és goniometriai úton bizonyítjuk. Egységnek véve a körülírt kör AA' átmérőjét, a szögek szokásos jelölésével az AA_1C és $AA'C$ derékszögű háromszögekből (1. ábra):

$$AA_1 = AC \cdot \sin\gamma = AA' \cdot \sin\beta \sin\gamma = \sin\beta\sin\gamma, \tag{3}$$

mert $AA'C\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta$. Másrészt az $AA'A_2$ derékszögű háromszögben

$$AA'A_2\sphericalangle = ABA_2\sphericalangle = ABC\sphericalangle + CBA_2\sphericalangle = ABC\sphericalangle + CAA_2\sphericalangle =$$
$$= \beta + (90^\circ - \gamma) = 90^\circ - (\gamma - \beta), \text{ és így}$$

$$AA_2 = AA' \cdot \sin AA'A_2\sphericalangle = \cos(\gamma - \beta). \tag{4}$$

Ezeket és az (1)-beli további szakaszokra adódó hasonló kifejezéseket (1) bal oldalába helyettesítve azonos átalakítások útján adódik az állítás helyessége.

Mármost (3) és a belőle a betűk ciklikus felcserélésével adódó $BB_1 = \sin\gamma\sin\alpha$, $CC_1 = \sin\alpha\sin\beta$ kifejezések minden háromszögben pozitívok, viszont (4) és a $BB_2 = \cos(\alpha - \gamma)$, $CC_2 = \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta)$ jobb oldala lehet negatív is, amennyiben pl. a $\alpha - \gamma$, ill. $\alpha - \beta$ tompaszög (3. és 4. ábra).